

УДК 629.7.036.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОТОРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВАЛОВ

М.К. Леонтьев, А.В. Иванов, С.А. Дегтярев

Рассматривается построение уравнений движения для стержневых динамических систем, позволяющих проводить расчеты совместных изгибно-продольно-крутильных колебаний любой пространственной системы, включающей подсистемы с параллельными, скрещивающимися и пересекающимися осями.

Ключевые слова: роторная динамика, пространственные стержневые системы, матрицы жесткости и инерции.

Введение

Современные тенденции в решении задач роторной динамики газотурбинных двигателей определяют необходимость расчета совместных изгибно-крутильно-осевых колебаний для систем с пространственным расположением осей вращения. Такие системы встречаются в воздушно-реактивных двигателях, трансмиссиях вертолетов, трансмиссиях ветровых установок и т.д.

Ранние версии специализированных программ для решения практических задач роторной динамики предназначались в основном для расчета стержневых роторных систем в осесимметричной постановке. Такая постановка характеризуется соосным расположением осей роторов и корпусов, осесимметричной подвеской, расположением инерционных элементов и т.д. Работы в этом направлении велись в МАИ Д.В. Хрониным [1], А.В. Ивановым, М.К. Леонтьевым [2], в ЦИАМе В.О. Бауэр [3] и другими исследователями.

Появление мощных конечно-элементных программных систем позволило решать задачи динамики с учетом нарушения осевой симметрии роторных систем. Однако их использование вплоть до настоящего времени связано с большой трудоемкостью моделирования и ограничениями для анализа нелинейных задач в нестационарной постановке с такими специфическими элементами роторных систем, как подшипники скольжения, упругодемпферные опоры, зазоры, подшипники качения и т.д. В связи с этим продолжается использование и развитие алгоритмов и программ, ориентирующихся на моделирование и анализ стержневых роторных систем, описываемых специальными элементами – балками, оболочками, подшипниками различных типов и т.д.

Расчет связанных колебаний в роторных системах с пересекающимися осями имеет также первостепенное значение при моделировании систем, включающих в себя зубчатые зацепления. В мультипликаторах, редукторах может существовать достаточно большое количество валов (подсистем), разнесенных в пространстве и соединенных между собой зубчатыми парами. Оси могут быть параллельными (цилиндрические зубчатые передачи), пересекающимися (конические), скрещивающимися (гипоидные). В статье представлены математические модели и алгоритмы расчета пространственных стержневых систем.

Уравнение движения

Общее уравнение динамики для дискретных линейных колебательных систем в матричной форме обычно записывается как

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q(t), \quad (1)$$

где M – матрица инерции; C – демпфирующая и гироскопическая матрица; K – матрица жесткости; Q – матрица внешних сил; q – матрица перемещений.

При отсутствии демпфирования задача о собственных значениях и векторах описывается уравнением:

$$M\dot{q} + Kq = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) может быть также записано через матрицу податливости.

$$AM\dot{q} + Iq = 0, \quad (3)$$

где A – матрица податливости; I – единичная матрица.

Уравнения (2) и (3) легко решаются существующими математическими пакетами напрямую. Остановимся на случае, когда движение динамической системы описывается уравнением (2). Рассмотрим математические модели и алгоритмы построения таких матриц для пространственной системы с пересекающимися осями подсистем, из которых она состоит.

Задание систем координат

Пусть обобщенная модель роторной системы состоит из n подсистем, соединенных между собой и с неподвижным основанием m связями. К подсистемам относим структурные элементы конструкции, описываемые балочными, оболочечными и инерционными конечными элементами. Подсистемами могут быть роторы, корпуса, основания и т.д. Предполагается, что осевые линии подсистем являются скрещивающимися прямыми.

На рис. 1 показано взаимное расположение координатных систем, связанных с началом подсистем. С основанием связана глобальная (основная) правая декартова прямоугольная система координат $OXYZ$, а с подсистемами – аналогичные локальные системы $(O'X'Y'Z')^{(i)}$ $i = 1 \dots n$.

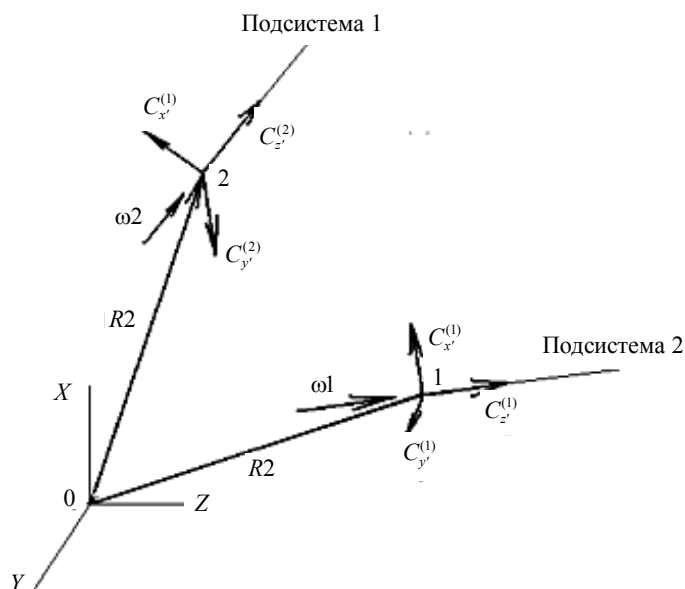


Рис. 1

Оси $X(X')$ и $Y(Y')$ во всех подсистемах являются поперечными осями, а ось $Z(Z')$ – продольной осью. Расположение каждой локальной системы координат относительно основной задается вектором Ri и тремя ортами (векторами единичной длины) $Cx^{(i)}$, $Cy^{(i)}$, $Cz^{(i)}$.

Вектор Ri определяет положение начальной точки O' локальной системы координат и задается столбцом проекций R на оси основной координатной системы:

$$R = (Rx, Ry, Rz)^T. \quad (4)$$

Верхний индекс T в записи R и в дальнейшем означает операцию транспонирования.

Орты Cx' , Cy' , Cz' определяют направления соответствующих локальных координатных осей X' , Y' , Z' и задаются соответствующими столбцами проекций (направляющих косинусов):

$$\begin{aligned} Cx' &= (Cx'x, Cx'y, Cx'z)^T; \\ Cy' &= (Cy'x, Cy'y, Cy'z)^T; \\ Cz' &= (Cz'x, Cz'y, Cz'z)^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Столбцы Cx' , Cy' , Cz' образуют матрицу направляющих косинусов C :

$$C = (Cx' \quad Cy' \quad Cz') = \begin{pmatrix} Cx'x & Cy'x & Cz'x \\ Cx'y & Cy'y & Cz'y \\ Cx'z & Cy'z & Cz'z \end{pmatrix}. \quad (6)$$

С использованием матрицы C (6) преобразования локальных проекций в глобальные проекции и обратно для произвольного вектора V записываются следующим образом:

$$V = CV'; \quad V' = C^T V. \quad (7)$$

Ориентация осей локальной системы координат может быть задана тремя углами Эйлера ψ , θ и φ , где ψ – угол прецессии (угол начального разворота осей X и Y вокруг оси Z); θ – угол нутации (угол отклонения оси Z' от оси Z , полученный вращением вокруг нового положения оси Y); φ – угол собственного вращения (угол поворота относительно оси Z' системы осей координат, полученной в результате предыдущих операций).

Матрица C направляющих косинусов осей локальной системы координат может быть выражена через тригонометрические функции углов Эйлера (8):

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix}^T. \quad (8)$$

Если ориентация осей локальной системы координат задается последовательными поворотами вокруг оси X , промежуточного положения оси Y' и окончательного положения оси Z' на углы α , β и γ соответственно, то транспонированную матрицу C можно получить перемножением трех матриц поворота (9):

$$C^T = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вращение подсистем задается столбцом угловых скоростей $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, где ω_i – угловая скорость вращения i -й подсистемы, взятая со знаком «+» или «-». В принятой нами правой системе координат положительным вращением считается вращение по часовой стрелке, если смотреть в направлении орта Cz' продольной оси подсистемы. На рис. 1 показано расположение вектора скорости вращения подсистемы для случая положительного вращения. При изменении направления (знака) вращения изменяется и направление вектора ω .

Описание пространственной стержневой системы

Обобщенная модель стержневой системы состоит из ряда пространственных подсистем, соединенных между собой и с неподвижным основанием упругими связями. Каждая подсистема представлена в виде последовательно соединенных элементарных участков, разделенных сечениями. Любое сечение характеризуется набором двух индексов (s, i) , где s – номер подсистемы, i – номер сечения в подсистеме, $s = 1, 2, \dots, nS$, $i = 0, 1, \dots, \text{nel}(s)$, nS – число подсистем, $\text{nel}(s)$ – число участков в подсистеме s . Номера участков в подсистеме совпадают с номерами сечений, расположенных в конце участка.

Элементарные участки подсистем задаются матрицами жесткости $k_i^{(s)}$, матрицами инерции $M1_i^{(s)}$ и $M2_i^{(s)}$ начального и конечного сечения соответственно. Матрицы жесткости входят в матричные уравнения участков

$$q_i^{(s)} k_i^{(s)} = Q r_i^{(s)}. \quad (10)$$

Матрицы инерции $M1_i^{(s)}$ и $M2_i^{(s)}$ входят в матричные уравнения, описывающие инерционные нагрузки элементарных участков, приведенные к начальному и конечному сечениям.

$$\begin{aligned} Q_{i-1}^{(s)} &= -M1_i^{(s)} \ddot{q}_{i-1}^{(s)}; \\ Q_i^{(s)} &= -M2_i^{(s)} \ddot{q}_i^{(s)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $Q_{i-1}^{(s)}$, $\ddot{q}_{i-1}^{(s)}$, $Q_i^{(s)}$, $\ddot{q}_i^{(s)}$ – столбцы инерционных нагрузок и ускорений перемещений начального и конечного сечений рассматриваемого элементарного участка.

Связи задаются матрицами жесткости $k^{(L)}$, которые входят в матричные уравнения, описывающие деформации связей

$$Qr_2^{(L)} = -k^{(L)} q_2^{(L)}, \quad L = 1, 2 \dots nL, \quad (12)$$

где nL – число связей; $k^{(L)}$ – матрица жесткости связи с порядковым номером L ; $q_2^{(L)}$ – столбец перемещений конечного сечения; $Qr_2^{(L)}$ – столбец реакций связи в конечном сечении, возникающих при перемещениях конечного сечения, заданных столбцом $q_2^{(L)}$, при условии заделки начального сечения.

Начальное и конечное сечение связи совпадают с сечениями подсистем, задаваемых парами индексов $(s1, i1)$ и $(s2, i2)$ соответственно.

Взаимное расположение сечений подсистем, матрицы жесткости и инерции элементарных участков, матрицы жесткости связей задаются в локальных системах координат, определенным образом ориентированных относительно единой для всей системы глобальной системы координат $OXYZ$. Преобразования векторов и матриц, связанные с переходом от локальных систем координат к глобальной координатной системе описано ранее.

После перехода в глобальную систему координат расположение сечений s -й подсистемы в исходном недеформированном состоянии задается радиус-векторами $R_i^{(s)}$ (рис. 2).

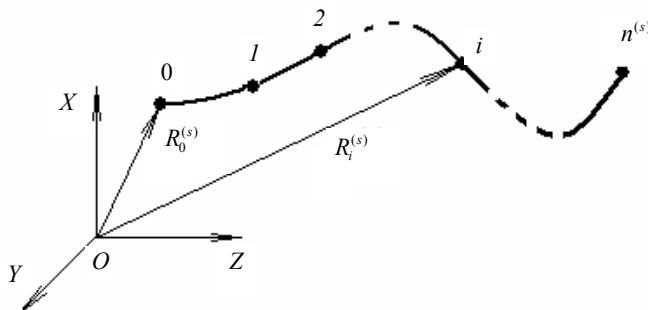


Рис. 2

Перемещения сечений и внутренние нагрузки, действующие на сечение со стороны участка, следующего за сечением, представляются в виде столбцов

$$q = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где u , φ , P , T – столбцы проекций на координатные оси векторов линейного перемещения, углового перемещения, силы и момента:

$$\begin{aligned} u &= (u_x, u_y, u_z)^T; \quad \varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T; \\ P &= (P_x, P_y, P_z)^T; \quad T = (T_x, T_y, T_z)^T. \end{aligned}$$

Аналогично представляются реакции связей Qr , инерционные нагрузки Qi и внешние нагрузки ΔQ :

$$Qr = \begin{pmatrix} Pr \\ Tr \end{pmatrix}; \quad Qi = \begin{pmatrix} Pi \\ Ti \end{pmatrix}; \quad \Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta T \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Наряду с введенными обозначениями в дальнейших описаниях будут использоваться матрицы $O_n, I_n, O, I, W(r)$, которые определяются следующим образом: O_n и I_n – квадратные нулевая и единичная матрицы порядка n ; O и I – квадратные нулевая и единичная матрицы, порядки которых определяются из контекста; $W(r)$ – антисимметричная квадратная матрица, используемая при матричной записи векторных произведений. Элементы матрицы $W(r)$ определяются проекциями вектора r на координатные оси

$$W(r) = \begin{pmatrix} 0 & r_z & -r_x \\ -r_z & 0 & r_y \\ r_x & -r_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

С учетом принятых обозначений координат матрицы инерции начального и конечного сечений i -го участка подсистемы s могут быть записаны следующим образом:

$$M1_i^{(s)} = \begin{pmatrix} m1I_3 & W(S1) \\ W(S1)^T & J1 \end{pmatrix}_i^{(s)}, \quad S1 = \begin{pmatrix} S1_X \\ S1_Y \\ S1_Z \end{pmatrix}_1^{(s)};$$

$$M2_i^{(s)} = \begin{pmatrix} m2I_3 & W(S2) \\ W(S2)^T & J2 \end{pmatrix}_i^{(s)}, \quad S2 = \begin{pmatrix} S2_X \\ S2_Y \\ S2_Z \end{pmatrix}_1^{(s)},$$

где $m1_i^{(s)}, m2_i^{(s)}$ – массы, присоединяемые к начальному и конечному сечению элементарного участка;

$S1_i^{(s)} = \begin{pmatrix} S1_X \\ S1_Y \\ S1_Z \end{pmatrix}_i^{(s)}, S2_i^{(s)} = \begin{pmatrix} S2_X \\ S2_Y \\ S2_Z \end{pmatrix}_i^{(s)}$ – столбцы проекций векторов статических моментов масс $m1_i^{(s)}$ и

масс $m2_i^{(s)}$ относительно начального и конечного сечения элементарного участка соответственно;

$J1_i^{(s)} = \begin{pmatrix} J1_{XX} & J1_{XY} & J1_{XZ} \\ J1_{YX} & J1_{YY} & J1_{YZ} \\ J1_{ZX} & J1_{ZY} & J1_{ZZ} \end{pmatrix}_i^{(s)}, J2_i^{(s)} = \begin{pmatrix} J2_{XX} & J2_{XY} & J2_{XZ} \\ J2_{YX} & J2_{YY} & J2_{YZ} \\ J2_{ZX} & J2_{ZY} & J2_{ZZ} \end{pmatrix}_i^{(s)}$ – матрицы моментов инерции масс $m1_i^{(s)}$ и

масс $m2_i^{(s)}$ относительно начального и конечного сечения элементарного участка соответственно.

Матрица статической жесткости элементарного участка

Жесткость i -го элементарного участка подсистемы s описывается полной матрицей $K_i^{(s)}$, которая входит в матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} Q_{i-1}^{(s)} \\ Q_i^{(s)} \end{pmatrix} = -K_i^{(s)} \begin{pmatrix} q_{i-1}^{(s)} \\ q_i^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица $K_i^{(s)}$ может быть представлена в блочном виде

$$K_i^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}_i^{(s)}. \quad (17)$$

Матрицы статической жесткости упругой связи между подсистемами

Полная жесткость $K^{(L)}$ упругой связи с порядковым номером L определяется матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}^{(L)} = -K^{(L)} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^{(L)}, \quad (18)$$

где $q_1^{(L)} = (q_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ и $q_2^{(L)} = (q_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ – столбцы перемещений начального и конечного сечения связи соответственно; $Q_1^{(L)} = (Q_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ и $Q_2^{(L)} = (Q_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ – столбцы реакций связи в указанных сечениях.

Матрица $K^{(L)}$ может быть представлена в блочном виде

$$K^{(L)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{(L)}. \quad (19)$$

Блоки, входящие в выражение (19), вычисляются через известную матрицу жесткости $K^{(L)}$ свободного конечного сечения связи при заделанном начальном сечении по формулам:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(L)} &= D^T K_{22}^{(L)} D; \quad K_{12}^{(L)} = -D^T K_{22}^{(L)}; \\ K_{21}^{(L)} &= (K_{12}^{(L)})^T; \quad K_{22}^{(L)} = k^{(L)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} I_3 & W(r) \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix}, \quad r = (R_{i2}^{(s2)})^{(L)} - (R_{i1}^{(s1)})^{(L)}.$$

Здесь: $(R_{i2}^{(s2)})^{(L)}$ и $(R_{i1}^{(s1)})^{(L)}$ – радиус-векторы начального и конечного сечения связи.

Построение матрицы жесткости динамической системы

Полная матрица жесткости всей системы получается наложением матриц жесткостей элементарных участков и связей обычным способом, используемым во всех конечно-элементных системах.

Матрица подсистемы s получается наложением матриц ее элементарных участков по следующей схеме:

$$K^{(s)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & O_6 & \cdots & O_6 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & O_6 \\ O_6 & K_{32} & K_{33} & \cdots & O_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_6 & O_6 & O_6 & \cdots & K_{n+1,n+1} \end{pmatrix}^{(s)}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}^{(s)} &= (K_{11})_1^{(s)}; \quad K_{12}^{(s)} = (K_{12})_1^{(s)}; \\ K_{21}^{(s)} &= (K_{21})_1^{(s)}; \quad K_{22}^{(s)} = (K_{22})_1^{(s)} + (K_{11})_2^{(s)}; \quad K_{23}^{(s)} = (K_{12})_2^{(s)}; \\ K_{32}^{(s)} &= (K_{21})_2^{(s)}; \quad K_{33}^{(s)} = (K_{22})_2^{(s)} + (K_{11})_3^{(s)}; \quad \cdots \\ \cdots \quad K_{n+1,n+1}^{(s)} &= (K_{22})_{n(s)}^{(s)}. \end{aligned}$$

Процедура формирования матрицы подсистемы графически представлена на рис. 3. Полные матрицы жесткости элементарных участков размером 12×12 располагаются по диагонали. Места наложения, в которых производится суммирование диагональных блоков полных матриц элементарных участков, показаны более темным цветом и соответствуют матрицам жесткости внутренних сечений подсистемы, разделяющих соседние элементарные участки. Эти матрицы имеют размер 6×6 .

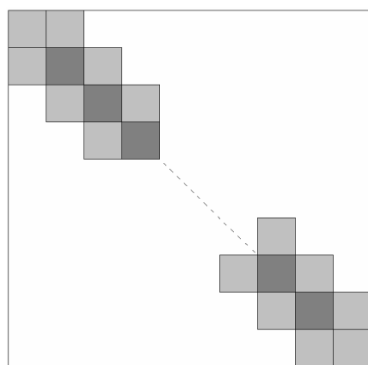


Рис. 3

Полная матрица жесткости системы, состоящей из n не связанных между собой подсистем, является блочно-диагональной матрицей, составленной из матриц входящих в нее подсистем

$$K = \text{diag}(K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(n)}). \quad (22)$$

Графическое изображение такой матрицы представлено на рис. 4.

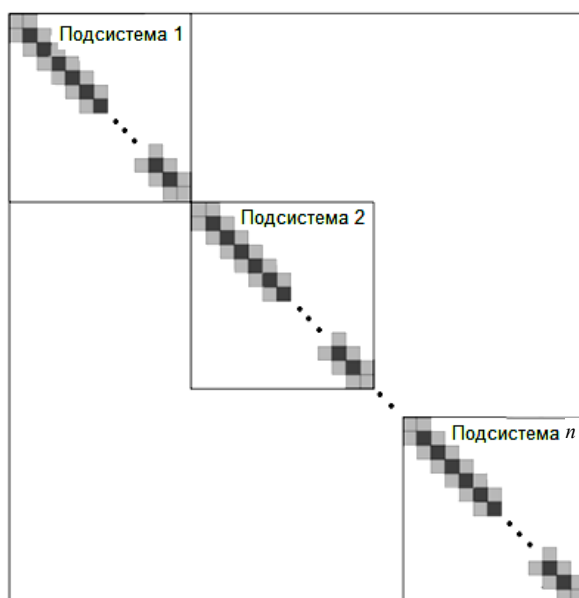


Рис. 4

Добавление упругой связи сводится к суммированию блоков полной матрицы добавляемой связи с блоками полной матрицы системы. При добавлении связи с порядковым номером L , начальное сечение которой является сечением $i1$ подсистемы $s1$, а конечное сечение – сечением $i2$ подсистемы $s2$, суммирование блоков проводится по следующей схеме:

$$\begin{aligned} K_{i1,i1}^{(s1,s1)} &\Leftarrow K_{i1,i1}^{(s1,s1)} + K_{11}^{(L)}; & K_{i1,i2}^{(s1,s2)} &\Leftarrow K_{i1,i2}^{(s1,s2)} + K_{12}^{(L)}; \\ K_{i2,i1}^{(s2,s1)} &\Leftarrow K_{i2,i1}^{(s2,s1)} + K_{21}^{(L)}; & K_{i2,i2}^{(s2,s2)} &\Leftarrow K_{i2,i2}^{(s2,s2)} + K_{22}^{(L)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где верхние индексы являются индексами блочно-диагональной матрицы, образованной матрицами подсистем, а нижние индексы – индексами сечений, выделяющих внутри блоков этой матрицы подблоки соответствующих сечений.

На рис. 5 в качестве примера дано графическое изображение процедуры преобразования полной матрицы системы (см. рис. 4) при добавлении связи, соединяющей второе сечение первой подсистемы с пятым сечением второй подсистемы.

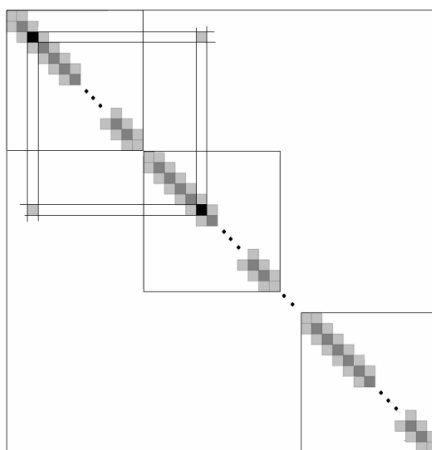


Рис. 5

В результате описанных операций получается полная матрица статической жесткости системы, с помощью которой можно определить внешние нагрузки ΔQ , которые надо приложить к сечениям системы, чтобы получить заданные перемещения q этих сечений. Соответствующее матричное уравнение имеет вид

$$\Delta Q = Kq, \quad (24)$$

где q – столбец перемещений всех сечений системы, начиная с начального нулевого сечения первой подсистемы и кончая последним сечением последней подсистемы; ΔQ – столбец внешних нагрузок, соответствующих перемещениям столбца q .

Построение матрицы инерции динамической системы

Полная матрица инерции M системы является блочно-диагональной матрицей, составленной из матриц инерции подсистем

$$M = \text{diag}(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(nS)}). \quad (25)$$

Матрицы инерции подсистем также являются блочно-диагональными матрицами, составленными из матриц инерции сечений. Матрицы инерции сечений подсистемы s состояются из матриц инерции элементарных участков по следующей схеме:

$$\begin{aligned} M_{11}^{(s)} &= M1_1^{(s)}; \\ M_{22}^{(s)} &= M2_1^{(s)} + M1_2^{(s)}; \quad M_{33}^{(s)} = M2_2^{(s)} + M1_3^{(s)}; \dots, \quad M_{n(s),n(s)}^{(s)} = M2_{n(s)}^{(s)} + M1_{n(s)+1}^{(s)}; \\ M_{n(s)+1,n(s)+1}^{(s)} &= M2_{n(s)}^{(s)}. \end{aligned} \quad (26)$$

В результате описанных операций получается полная матрица инерции системы. С ее помощью можно определить инерционные внешние нагрузки Qi , которые надо приложить к сечениям системы, движущимся с заданными ускорениями \ddot{q} , чтобы обеспечить равновесие приложенных к системе сил и моментов и в соответствии с принципом Даламбера свести динамическую задачу к задаче статической. Соответствующее матричное уравнение имеет вид

$$Qi = -M\ddot{q}. \quad (27)$$

Выводы

Разработаны математические модели и алгоритмы для моделирования и анализа сложных пространственных систем, состоящих из стержневых подсистем с упругими связями. Применение этих разработок позволяет рассчитывать совместные изгибно-продольные колебания многовальных динамических систем в стержневой постановке с учетом пространственного расположения их валов, корпусов, инерционных элементов, опор и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
2. Иванов А.В., Леонтьев М.К. Модальный анализ динамических систем роторов // Известия вузов. Авиационная техника. 2005. № 3. С. 31–35.
3. Бауэр В.О., Биргер И.А. и др. Динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1981 г. 232 с.

Поступила в редколлегию 21.12.11

SIMULATION OF ROTOR DYNAMIC SYSTEMS WITH SPATIAL SHAFT POSITION

M.K. Leont'ev, A.V. Ivanov, and S.A. Degtyarev

This paper considers the construction of motion equations for bar dynamic systems that make it possible to calculate the coupled lateral-axial-torsional oscillations of any spatial system consisting of subsystems with skew and intersecting axes.

Keywords: rotor dynamics, spatial bar systems, stiffness and inertia matrices.

Леонтьев Михаил Константинович – докт. техн. наук (МАИ, Москва)

E-mail: lem@alfatran.com

Иванов Александр Владимирович – канд. техн. наук (МАИ, Москва)

E-mail: lem@alfatran.com

Дегтярев Сергей Александрович – руководитель направления (ООО «Альфа-Транзит», Химки)

E-mail: degs@alfatran.com