

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ В РОТОРНОЙ ДИНАМИКЕ

ЛЕОНТЬЕВ Михаил Константинович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н.
Тел.: 8-985-768-7129; e-mail: lem@alfatran.com

LEONTIEV Mikhail K., professor of Moscow Aviation Institute (National Research University), Doctor of Engineering Science.
Phone: +7-985-768-7129; e-mail: lem@alfatran.com

СЕТКОВА Екатерина Игоревна, ассистент Московского авиационного института (национального исследовательского университета).
Тел.: 8-903-685-8111; e-mail: ekaterina-snetkova@ya.ru

SNETKOVA Ekaterina I., assistant of Moscow Aviation Institute (National Research University).
Phone: +7-903-685-8111, e-mail: ekaterina-snetkova@ya.ru

Рассматривается математическая модель нелинейного шарикоподшипника с пятью степенями свободы, используемая в динамическом анализе сложных роторных систем, и результаты ее применения. Модель построена на базе теории Герца. В пятистепенной модели шарикоподшипника учитываются зазор в подшипнике, количество тел качения в зоне нагружения, контактная жесткость, а также осевая сила, действующая на подшипник, угол контакта. Представлены результаты статического и динамического анализа точечного ротора с нелинейным подшипником. Показано существенное влияние на жесткостные характеристики подшипника осевой силы, действующей на подшипник, и неуравновешенной силы ротора.

The mathematical model of nonlinear rolling bearing with five degrees of freedom and the results of its application are considered. The model is used in dynamic analysis of complex rotor systems. It is based on the Hertz theory and takes into account bearing clearance, the number of rolling elements in contact, contact stiffness and also axial force acting on a bearing, contact angle. The results of static and dynamic analysis of a point rotor with nonlinear element are presented. This paper shows the significant influence of axial force acting on bearing and unbalanced rotor force on bearing stiffness.

Ключевые слова: подшипники качения, зазор, жесткостные характеристики, математическая модель.

Key words: rotor bearings, clearance, stiffness characteristics, mathematical model.

Введение

При анализе линейных роторных систем с подшипниками качения наиболее часто используется приближенная оценка жесткостных и демпфирующих свойств этих подшипников. Как правило, недостаток такого подхода в том, что в реальности жесткость подшипника существенно зависит от нагружения его действующими в роторной системе силами, т.е. от режимов работы, геометрии и величины зазоров в подшипнике, величины посадок внутреннего и внешнего кольца в роторе и статоре и т.д.

Например, простейшие оценки показывают, что зазор в подшипнике снижает жесткость опоры, а следовательно, и резонансные частоты [1]. Эти же результаты показываются и в работе [2], в которой исследуется нестационарное динамическое поведе-

ние ротора, установленного на шариковых подшипниках с внутренним зазором.

Игнорирование всех этих факторов ухудшает как количественные, так и качественные результаты при анализе роторных систем [3]. В частности, если оценка основной роторной гармоники по частоте и амплитуде может быть проведена с точностью, устраивающей конструкторов вращающихся машин, то качественный и количественный анализ роторной системы по другим составляющим компонентам вибрационного сигнала невозможен. Задача может быть полноценно решена только в нестационарной постановке с учетом нелинейности жесткостных характеристик подшипников качения [4, 5].

Модели подшипников, учитывающие факторы, приводящие к нелинейности, различают по слож-

ности и, в первую очередь, по нагрузкам, которые они учитывают.

Наиболее распространены модели, имеющие две степени свободы в радиальных направлениях, которые позволяют уже существенно улучшить результаты анализа роторных систем.

Такие модели, как правило, построены на контактной теории Герца, связывающей радиальные нагрузки, действующие на подшипник, и деформацию в пятне контакта между телом качения и кольцами подшипника. При описании модели подшипника принимается, что отсутствуют любые виды проскальзывания тел и поверхностей качения. Демпфирование обычно рассматривается в постановке эквивалентного вязкого и линейного трения. В расчетах с помощью этих моделей учитывается вес ротора, внутренний зазор в подшипнике, рассчитывается количество тел качения в зоне нагружения, распределение нагрузки по телам качения [6–8].

Развитием двухстепенной модели является модель, включающая дефекты на беговых дорожках и телах качения [9, 10]. Дефекты обладают протяженностью в окружном направлении и моделируются путем изменения величины зазора при входе тела качения в зону дефекта и выхода из него.

В работе [4] двухстепенная модель шарикового подшипника расширена включением в нее возможности рассчитать контактную жесткость, входящую в выражение силы с учетом кривизны беговых дорожек. Эти зависимости известны и приводятся в многочисленных справочниках по подшипникам [11, 12]. Добавлена также возможность расчета основных кинематических частот шариковых и роликовых подшипников по известной геометрии и частоте вращения ротора. Модель включена в программную систему Dynamics R4 для анализа динамики роторных систем в нестационарной и нелинейной постановке с учетом веса [13]. Анализ ротора в этой системе на двух нелинейных подшипниках качения показал существенное влияние режимов работы на динамику ротора. Появилась возможность исследовать влияние величины зазора, частоты вращения на частотные спектры и амплитудно-частотные характеристики для любой роторной системы на подшипниках качения.

С учетом вышесказанного дальнейшие шаги в развитии модели подшипника касались учета инерции тел качения в подшипнике [14, 15]. Незначительное усложнение модели уточняет как частотные, так и амплитудные характеристики роторной системы.

Радиально-упорные подшипники нагружены не только радиальными силами, но и осевыми, появ-

ляющимися в процессе работы машины. Наличие такой силы изменяет положение колец друг относительно друга, появляются параллельные и осевые перекосы роторов в зазоре подшипника. Следовательно, меняются и жесткостные характеристики подшипника.

Для учета такого многофакторного нагружения требуются более точные модели, к каковым относятся пятистепенные модели, описанные еще Харрисом [16], но получившие свое развитие только в последнее время. Наиболее существенными достижениями в этом направлении являются работы [17–19].

Как уже отмечалось, создание и использование для анализа моделей, учитывающих все многообразие действующих на подшипник факторов, позволит значительно улучшить результаты количественного и качественного анализа роторных систем. С учетом этого определена цель работы — разработка нелинейных математических моделей подшипников качения двух типов (шарикового и роликового) и их практическое применение в задачах роторной динамики турбомашин.

Математическая модель, дающая близкое к реальности описание опоры с подшипником качения, шариковым или роликовым, может быть включена в модель многовальной многоопорной роторной системы для последующего анализа.

Ниже приводятся математические модели и алгоритмы различного уровня сложности для использования в анализе роторных систем, описанные в работах российских и зарубежных исследователей, часть из которых приведена выше.

Модели всех уровней сложности реализованы в виде силовых функций, где нагрузки, возникающие в подшипнике, являются функциями параметров движения внутренней обоймы.

Обобщенное уравнение движения роторной системы, включающей подшипники качения, может быть записано в матричной форме в виде

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_U + F_B + W, \quad (1)$$

где X , \dot{X} , \ddot{X} — соответственно столбцы виброперемещений, виброскоростей и виброускорений; M — матрица инерции; K — матрица жесткости; C — матрица демпфирования и гироскопических сил; F_U — столбец неуравновешенных сил; F_B — столбец сил, возникающих в подшипниках, зависящих от перемещений роторной системы; W — сила веса.

В общем случае уравнение (1) является нелинейным. Нагрузки, возникающие в подшипниках

различных типов, являются функциями перемещений и скоростей, поэтому точное решение такого уравнения возможно только в нестационарной постановке.

Модель подшипника с пятью степенями свободы без учета инерции тел качения

Модель с пятью степенями была разработана Джонсом еще в 1960 г. [20]. Изначально ее планировалось использовать при расчете в условиях статического нагружения для определения жесткости подшипника. Поэтому в ней были учтены только эффекты осевых перемещений и наклона внутренней обоймы.

В данной работе представлен алгоритм из статьи [21]. Рассмотрим координатные системы подшипника, принятые в модели.

Перемещение любой точки на оси ротора в самом общем случае может быть описано с помощью трех линейных перемещений и двух угловых. Соответственно модель подшипника должна представлять собой алгоритм, связывающий линейные и угловые перемещения ротора с реакциями подшипника. Используются правосторонние координатные системы (рис. 1).

Первая, не вращающаяся, система координат связана с внутренней обоймой, закрепленной на роторе, и соответствует степеням свободы ротора $\{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}^T$. Ее начало находится на оси вращения ротора. Ось z совпадает с направлением оси вращения ротора. Ось y совпадает с направлением статической нагрузки (гравитацией земли). Ось x перпендикулярна оси y . Компоненты θ_x и θ_y являются поперечными вращениями в плоскости z — y

и z — x . Запись θ_x означает поворот вокруг оси x . Запись θ_y означает поворот вокруг оси y .

Вторая система координат $\{r, Z, \theta\}^T$ определяет положение центра кривизны беговой дорожки внутренней обоймы для каждого шарика и имеет центр в номинальном положении центра кривизны внутренней обоймы.

Центр кривизны наружной обоймы является неподвижным и используется в качестве опорной точки. Для шариковых подшипников угол наклона внутренней обоймы (θ в местной системе координат) не имеет значения, поскольку сфера не может передавать соответствующий момент без трения. Наличие положительного номинального угла контакта α_0 подразумевает, что радиально-упорный подшипник нагружен в положительном направлении оси z .

Для j -го шарика смещение центра кривизны дорожки внутренней обоймы u связано со смещением внутренней обоймы d (известная входная величина) таким образом:

$$u = \{u_r, u_z, u_\theta\}^T = Rd = R\{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}^T, \quad (2)$$

где R — матрица перехода от локальной к глобальной системе координат:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & \sin \varphi_j & 0 & -z_p \sin \varphi_j & z_p \cos \varphi_j \\ 0 & 0 & 1 & r_p \sin \varphi_j & -r_p \cos \varphi_j \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix}_{3 \times 5}; \quad (3)$$

φ_j — угловое положение j -го тела качения; r_p — радиус центров тел качения; z_p — осевое расстояние

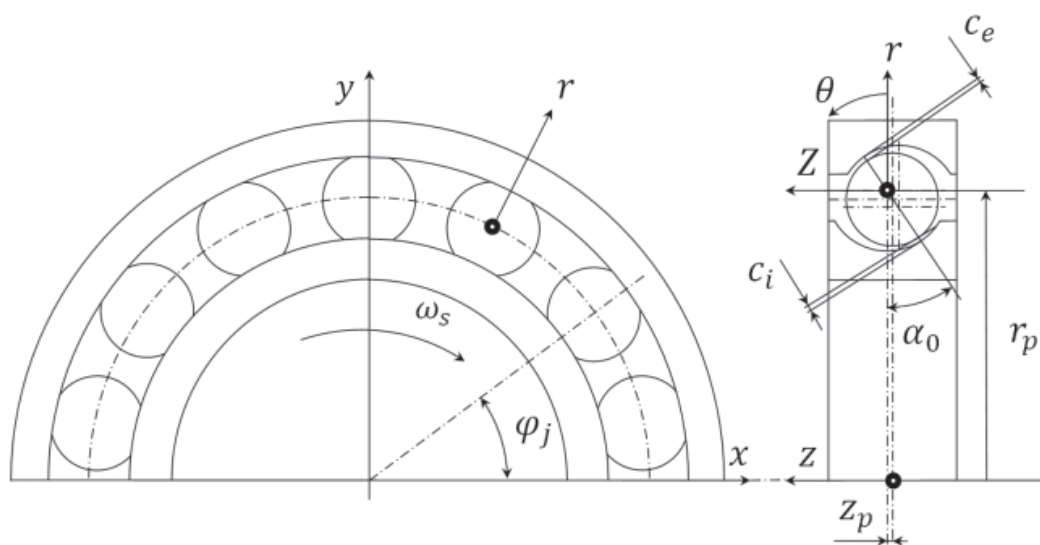


Рис. 1. К описанию систем координат подшипника

от центра подшипника до номинального центра кривизны дорожки внутренней обоймы.

При расчете в локальной системе координат необходимо определить нагрузку от смещения. Полагается, что все поверхности имеют один и тот же радиус кривизны. На рис. 2 показана геометрия центров кривизны дорожек внутренней обоймы, наружной обоймы и шарика до и после смещения внутренней обоймы.

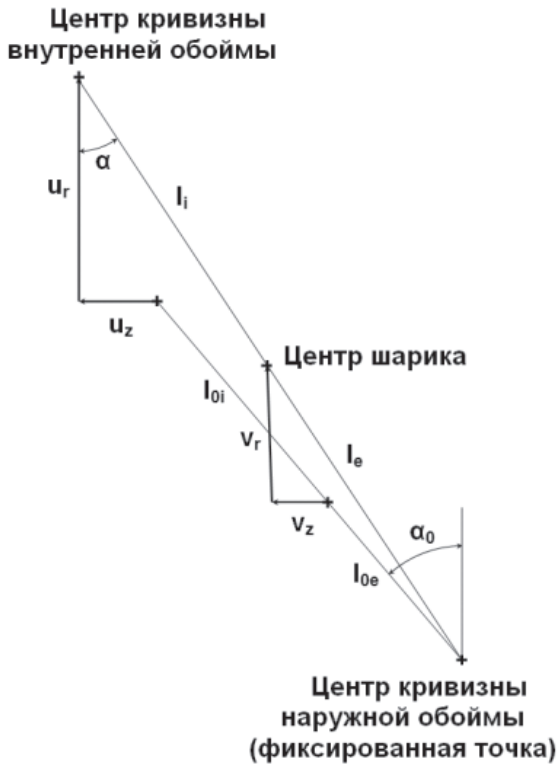


Рис. 2. Геометрия контакта (без учета инерции шарика)

Номинальные параметры, обозначенные индексом «0», могут быть рассчитаны следующим образом:

$$l_{0i} = r_i - \frac{D_b}{2} - c_i; \quad (4)$$

$$l_{0e} = r_e - \frac{D_b}{2} - c_e, \quad (5)$$

где l_{0i} и l_{0e} — номинальное расстояние между центром тела качения и центром кривизны внутренней и наружной обойм соответственно; r_i и r_e — радиусы кривизны дорожек внутренней и наружной обойм; D_b — диаметр шарика; c_i и c_e — зазоры в подшипнике по внутренней и наружной обоймам.

Действительный угол контакта, обусловленный известным смещением внутренней обоймы u , может быть рассчитан как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(l_{0i} + l_{0e}) \sin \alpha_0 + u_z}{(l_{0i} + l_{0e}) \cos \alpha_0 + u_r}, \quad (6)$$

где $u = \{u_r, u_z, u_\theta\}^T$ — положение центра кривизны дорожек внутренней обоймы; α — действительный угол контакта; α_0 — номинальный угол контакта.

Действительное расстояние между центром тела качения и центрами кривизны дорожек внутренней и наружной обойм

$$l_i + l_e = \left\{ [(l_{0i} + l_{0e}) \cos \alpha_0 + u_r]^2 + [(l_{0i} + l_{0e}) \sin \alpha_0 + u_z]^2 \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Общую контактную деформацию δ можно определить как

$$\delta = l_i + l_e - l_{0i} - l_{0e} - c_i - c_e, \quad (8)$$

где c_i и c_e — зазоры в подшипнике по внутренней и наружной обоймам.

Если контактная деформация положительная, то контактная нагрузка рассчитывается обычным образом. В противном случае контакт отсутствует, и нагрузка не передается:

$$Q = \begin{cases} K_p \delta^{1.5}, & \text{если } \delta > 0; \\ 0, & \text{если } \delta \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Мы получаем матрицу контактной нагрузки в локальной системе координат. Матрица представляет собой вектор-столбец:

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_z \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q \cos \alpha \\ -Q \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Вектор нагрузки в местной системе координат Q может быть приведен обратно к общей системе координат следующим образом:

$$F = \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y\}^T = R^T Q = R^T \{Q_r, Q_z, Q_\theta\}^T. \quad (11)$$

С помощью равенств (2)—(11) производится расчет для j -го шарика. Для получения функции силы в зависимости от смещения внутренней обоймы $F(d)$ необходимо просуммировать нагрузки от всех шариков.

Модель с пятью степенями свободы с учетом инерции тел качения

Здесь применяются те же основные положения, что и для модели с пятью степенями свободы без учета инерции. При учете инерции шарика контакты по внутренней и наружной обоймам могут происходить под разными углами, и уравнения равновесия шарика становятся следующими:

$$f(v) = \begin{Bmatrix} f_r(v_r, v_z) \\ f_z(v_r, v_z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i \cos \alpha_i - Q_e \cos \alpha_e + \frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2} \\ Q_i \sin \alpha_i - Q_e \sin \alpha_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где Q_i и Q_e — контактные нагрузки по внутренней и наружной обоймам соответственно в локальной системе координат:

$$Q_i = K_{pi} \delta_i^n, \text{ если } \delta_i > 0; \quad (13)$$

$$Q_e = K_{pe} \delta_e^n, \text{ если } \delta_e > 0. \quad (14)$$

Геометрия контакта с учетом инерции шарика показана на рис. 3, откуда можно получить

$$l_i = \frac{l_{0i} \cos \alpha_0 + u_r - v_r}{\cos \alpha_i} = \frac{l_{0i} \sin \alpha_0 + u_z - v_z}{\sin \alpha_i}; \quad (15)$$

$$l_e = \frac{l_{0e} \cos \alpha_0 + v_r}{\cos \alpha_e} = \frac{l_{0e} \sin \alpha_0 + v_z}{\sin \alpha_e}; \quad (16)$$

$$\delta_i = l_i - l_{0i} - c_i; \quad (17)$$

$$\delta_e = l_e - l_{0e} - c_e, \quad (18)$$

где l_i и l_e — действительное расстояние между центром тела качения и центром кривизны внутренней и наружной обойм соответственно; l_{0i} и l_{0e} — номинальное расстояние между центром тела качения и центром кривизны внутренней и наружной обойм; r_i и r_e — радиусы кривизны дорожек внутренней и наружной обойм соответственно; D_b — диаметр шарика; c_i и c_e — зазоры в подшипнике по внутренней и наружной обоймам; $u = \{u_r, u_z, u_\theta\}^T$ — положение центра кривизны дорожек внутренней обоймы; $v = \{v_r, v_z\}^T$ — положение шарика; δ_i, δ_e — контактная деформация по внутренней и наружной обоймам соответственно; α_i, α_e — действительный

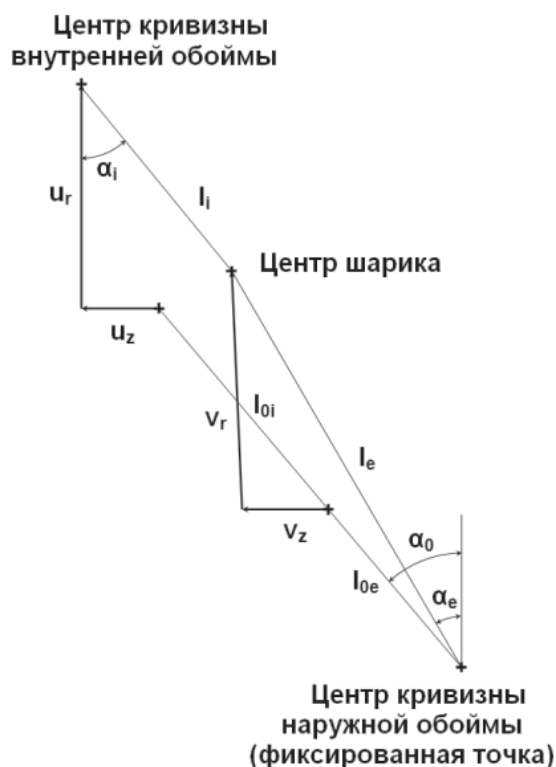


Рис. 3 Геометрия контакта с учетом инерции шарика

угол контакта по внутренней и наружной обоймам соответственно; α_0 — номинальный угол контакта.

Для данного положения внутреннего кольца u существует проблема нелинейности, в связи с чем положение шарика неизвестно. Решение находится с помощью метода Ньютона—Рафсона при условии существования контакта с обеими обоймами. В общем случае этот метод представляет собой модифицированный метод касательных. Если мы хотим избежать вычисления производной на каждом шаге, то можно взять $f'(x^0)$ вместо $f'(x)$, где x^0 — начальное приближение:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f'(x^0)}. \quad (19)$$

В отличие от обычного метода касательных, в модифицированном методе предъявляется меньше требований к выбору начального приближения, а также гарантировано отсутствие деления на ноль, если $f'(x^0) \neq 0$.

Метод Ньютона—Рафсона называют также методом касательных, так как новое приближение x^{k+1} является абсциссой точки пересечения касательной, проведенной в точке $(x^k, f(x^k))$ к графику функции $f(x)$, с осью OX (рис. 4).

Применим метод Ньютона—Рафсона к данной модели. Методом последовательных итераций определим положение шарика v :

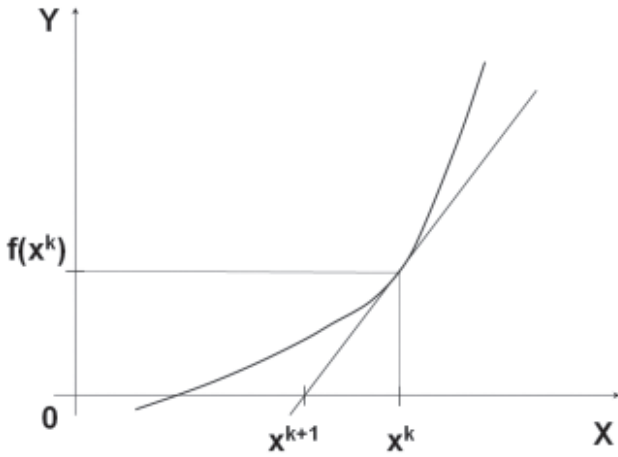


Рис. 4. Геометрическая интерпретация метода Ньютона—Рафсона

$$\begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix}_i - J_i^{-1} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix}_i, \quad (20)$$

где J — матрица Якобиана, рассчитываемая следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial v_r} & \frac{\partial f_r}{\partial v_z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial v_r} & \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Элементы матрицы, представляющие собой частные производные элементарных сил по координатам, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial v_r} &= -\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} \cos^2 \alpha_i - \\ &- \frac{Q_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i - \frac{\partial Q_e}{\partial \delta_e} \cos^2 \alpha_e - \frac{Q_e}{l_e} \sin^2 \alpha_e; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial v_z} &= \frac{\partial f_z}{\partial v_r} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i + \frac{Q_i}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \\ &- \frac{\partial Q_e}{\partial \delta_e} \sin \alpha_e \cos \alpha_e + \frac{Q_e}{l_e} \sin \alpha_e \cos \alpha_e. \end{aligned} \quad (23)$$

Элемент $\frac{\partial f_z}{\partial v_z}$ определяется аналогично $\frac{\partial f_r}{\partial v_r}$ заменой косинуса на синус и наоборот.

В модели необходимо учитывать условия существования или не существования контакта. Предполагаем отсутствие контакта по внутренней обойме. Тогда динамическое равновесие равенства (12) упрощается ($Q_i = 0$) и превращается в следующее:

$$\begin{Bmatrix} -Q_e \cos \alpha_e + \frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2} \\ -Q_e \sin \alpha_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

где m_{re} — масса тела качения; ω_c — скорость вращения обоймы; D_p — диаметр центров тел качения.

Компонент $\frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2}$ описывает инерцию тела качения.

Из этого очевидно следует, что существует единственное решение:

$$\alpha_e = 0 \quad (25)$$

и

$$Q_e = \frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2}. \quad (26)$$

Другими словами, внешняя обойма обеспечивает силу реакции от действия инерционной силы шарика. В результате угол контакта по наружной обойме становится равным нулю.

Чтобы определить, происходит ли контакт, может быть принято вышеизложенное допущение и при нем рассчитана контактная деформация по внутренней обойме. Из равенств (14) и (26) при $n = 3/2$ получаем контактную деформацию по наружной обойме:

$$\delta_e = \left(\frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2K_{re}} \right)^{2/3}. \quad (27)$$

Подстановка в равенство (18) дает

$$l_e = \delta_e + l_{0e} + c_e = \left(\frac{m_{re} \omega_c^2 D_p}{2K_{re}} \right)^{2/3} + l_{0e} + c_e. \quad (28)$$

Подставляя (25) в равенство (16), получаем следующие значения координат шарика:

$$v_z = -l_{0e} \sin \alpha_0; \quad (29)$$

$$v_r = l_e - l_{e0} \cos \alpha_0. \quad (30)$$

С использованием рассчитанного положения шарика v и данного u (положение внутренней обоймы) появляется возможность рассчитать деформацию внутренней обоймы из равенств (15) и (17). Если δ_i отрицательное, то контакт с внутренней обоймой не происходит и результирующая нагрузка от контакта по наружной обойме определяется равенством (26). С другой стороны, если δ_i положительное, то происходит контакт и для определения положения шарика должно быть приведено ре-

шение Ньютона—Рафсона согласно равенству (20). Контактные нагрузки могут быть рассчитаны с помощью равенств (13)—(18).

Контактные нагрузки Q_i и Q_e могут быть использованы подобным образом в равенстве (10) с целью получения матрицы нагрузки Q в локальной системе координат. Как и при создании модели с пятью степенями свободы без учета инерции, контактные нагрузки приводятся обратно в глобальную систему координат с помощью матрицы пересчета (3) и суммируются для всех шариков (11).

Модель роторной системы

На базе описанной выше математической модели были разработаны алгоритм и программный модуль, позволяющий по известным значениям перемещений и скоростей динамической системы ротора получать не только силовые и моментные реакции подшипника как элемента системы, но и его внутренние параметры: распределение нагрузок по телам качения по всем степеням свободы, углы контакта по каждому телу качения, перекосы колец и другие. Программный модуль был разработан в соответствии с идеологией и архитектурой программной системы Dynamics R4 для анализа роторной динамики вращающихся машин и включен в эту систему.

На рис. 5 показана исследуемая модель ротора. Ротор представляет собой систему из двух масс, моделирующих точечный ротор и точечный корпус. Корпус скреплен с основанием упругими связями, а точечные массы связаны между собой связью, моделирующей радиально-упорный подшипник. Ротор находится под действием дисбаланса и осевой силы.

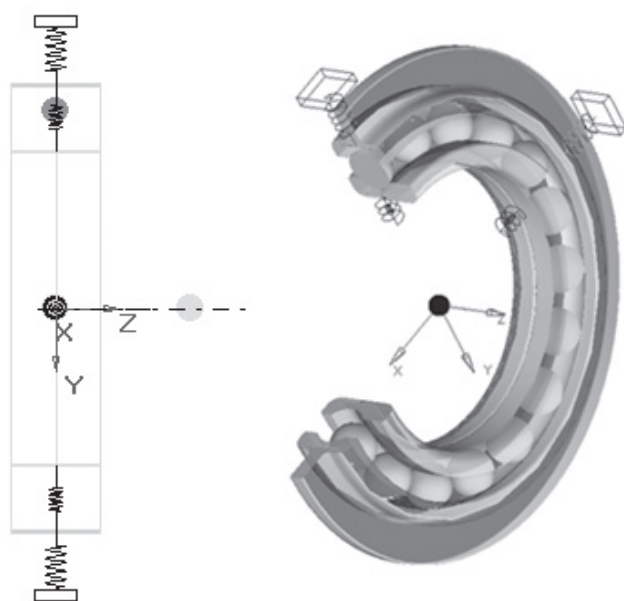


Рис. 5. Модель роторной системы

Исходные данные модели приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Значение
Масса корпуса, кг	10
Жесткость подвески, Н/м	2×10^8
Демпфирование в подвеске, Н·с/м	1000
Масса ротора, кг	3
Частота вращения ротора, Гц	3
Дисбаланс ротора, г·см	30, 300
Средний диаметр подшипника, мм	52
Диаметр тел качения, мм	11,9062
Число тел качения	11
Радиус канавок, мм	6,166
Номинальный угол контакта, град	30
Демпфирование в подшипнике, Н·с/м	2940
Осевая сила, Н	100—1000

Результаты статического анализа роторной системы

Статический анализ ротора с подшипником в составе сложной роторной системы является важной задачей, позволяющей определить жесткостные характеристики подшипника. В табл. 2 показана матрица тангентной жесткости, полученная для осевой силы 100 Н.

Можно отметить, что практический интерес могут вызывать только пять основных коэффициентов: kt_{00} , kt_{11} , kt_{22} , kt_{33} , kt_{44} , kt_{04} , kt_{13} , имеющих наибольшие значения. По сравнению с этими коэффициентами всеми остальными в любом последующем анализе роторной системы — статическом или динамическом — можно пренебречь.

Значения основных коэффициентов матрицы тангентной жесткости в зависимости от величины осевой силы, действующей на ротор, приведены в табл. 3.

Соответствующие табл. 3 кривые представлены на рис. 6.

Можно отметить существенное влияние осевой силы, действующей на роторе, на жесткостные свойства подшипника. Увеличение осевой силы со 100 Н до 1000 Н вызывает увеличение жесткости по различным коэффициентам в полтора—два раза.

Для инженеров, решающих задачи общей динамики, проблема определения жесткости опорного узла с подшипником качения всегда была достаточно острой. В немногочисленных источниках приводятся некоторые коэффициенты, однако их значения приближенные. В справочнике [1] приведе-

	Fx[N]	Fy[N]	Fz[N]	Mx[N/m]	My[N/m]	Mz[N/m]
ux[m]	1,37E+08	-1,19E+02	-1,65E+02	1	8,64E+05	-2,17E+02
uy[m]	-1,19E+02	1,40E+08	2,58E+06	-8,81E+05	-1	0
uz[m]	-1,65E+02	2,58E+06	1,73E+07	-4,38E+04	-2	0
urx[rad]	1	-8,81E+05	-4,38E+04	6,00E+03	0	0
ury[rad]	8,64E+05	-1	-2	0	5,83E+03	-1
urz[rad]	-2,17E+02	0	0	0	-1	0

Таблица 3

N	200	400	600	800	1000
Kt00	1,69E+08	2,08E+08	2,34E+08	2,53E+08	2,69E+08
Kt11	1,70E+08	2,09E+08	2,34E+08	2,53E+08	2,69E+08
Kt22	2,39E+07	3,40E+07	4,26E+07	5,00E+07	5,69E+07
Kt33	8,22E+03	1,17E+04	1,46E+04	1,71E+04	1,95E+04
Kt44	8,17E+03	1,17E+04	1,45E+04	1,71E+04	1,95E+04
Kt04	1,12E+06	1,47E+06	1,72E+06	1,93E+06	2,10E+06
Kt13	1,13E+06	1,47E+06	1,72E+06	1,93E+06	2,10E+06

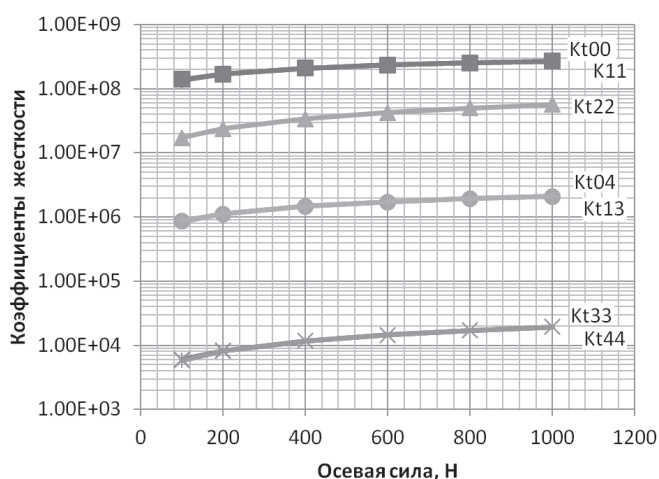


Рис. 6. Коэффициенты тангентной матрицы жесткости в зависимости от осевой силы на роторе

на таблица коэффициентов податливости для шариковых и роликовых подшипников разных размеров. В табл. 4 их значения преобразованы в коэффициенты жесткости. При этом в таблице дается значение только одного коэффициента — kt00. В соответствии с этими данными для исследуемого подшипника эта величина составляет 0,189e9—0,2e09 Н/м.

В нашем случае полученные значения kt00 меняются от 0,169e9 до 0,269e9 Н/м. Достаточно близ-

Таблица 4

Диаметр шейки вала, мм	Подшипник, Н/м	
	Шариковый	Роликовый
30-55	0,125e8 - 0,139e8	0,189e8 - 0,23e8
60-100	0,189e8 - 0,2e8	0,434e8 - 0,4e8

кие значения, к сожалению, получены только для этого типоразмера подшипника. Для других типоразмеров возможные расхождения могут достигать нескольких сотен процентов.

В настоящее время статическая задача по определению жесткостных свойств подшипника может быть решена в нелинейной контактной постановке методом конечных элементов. Например, с помощью имеющей широкое распространение системы ANSYS. Однако трудозатраты на решение этой задачи многократно превышают затраты на решение по приведенной методике, а в случае решения задач роторной динамики требуется предварительное определение матриц тангентной жесткости всех подшипников роторной системы для различных значений осевых сил, действующих на них.

Рассмотрим задачу по определению влияния радиальной силы на жесткостные характеристики подшипника. Следует отметить, что масса ротора может достигать нескольких десятков килограмм даже для такой размерности подшипника качения. На рис. 7 показаны полученные результаты для нескольких значений статической силы, приложенной к подшипнику в направлении силы веса при постоянной величине осевой силы 100 Н.

Из рисунка видно, что увеличение радиальной силы ведет к изменению коэффициентов тангентной матрицы жесткости. При увеличении осевой силы влияние радиальной силы на коэффициенты жесткости быстро снижается.

Влияние дисбалансной силы на жесткость подшипника аналогично влиянию силы веса. Очевидно, что для тяжелых роторов, хорошо отбаланси-

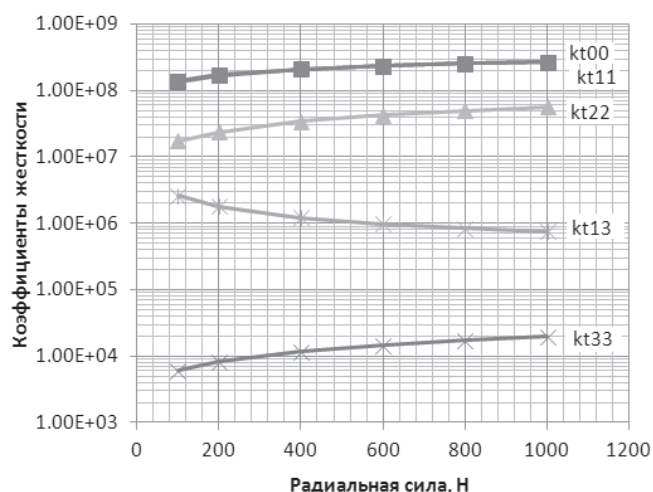


Рис. 7. Коэффициенты тангентной матрицы жесткости в зависимости от радиальной силы на роторе

ванных и в которых неуравновешенная сила на максимальных режимах не превышает 10–20% от силы веса, этим влиянием при решении инженерных задач можно пренебречь.

Тангентные матрицы жесткости можно с большой эффективностью использовать в линейном

анализе роторной системы для выделенного режима с постоянной частотой вращения, когда значения осевой и неуравновешенной сил не меняются. Подобная линеаризация нелинейных систем в случае сложных динамических систем может сократить время их анализа при сохранении приемлемой для практических нужд точности расчетов.

Результаты динамического анализа роторной системы

Динамический анализ роторной системы проводился для значения осевой силы 100 Н и дисбаланса 30 г·см в диапазоне до 50000 об/мин.

Для решения задачи используется прямое интегрирование уравнения (1) с применением адаптивного алгоритма интегрирования. Шаг интегрирования автоматически варьируется в процессе расчета в соответствии заданной точностью и текущих градиентов моделируемого процесса. Полученная амплитудно-частотная характеристика одинакова как для направления Y , так и направления X , и представлена на рис. 8.

Рис. 9– 15 показывают, как менялась жесткость подшипника в зависимости от частоты вращения.

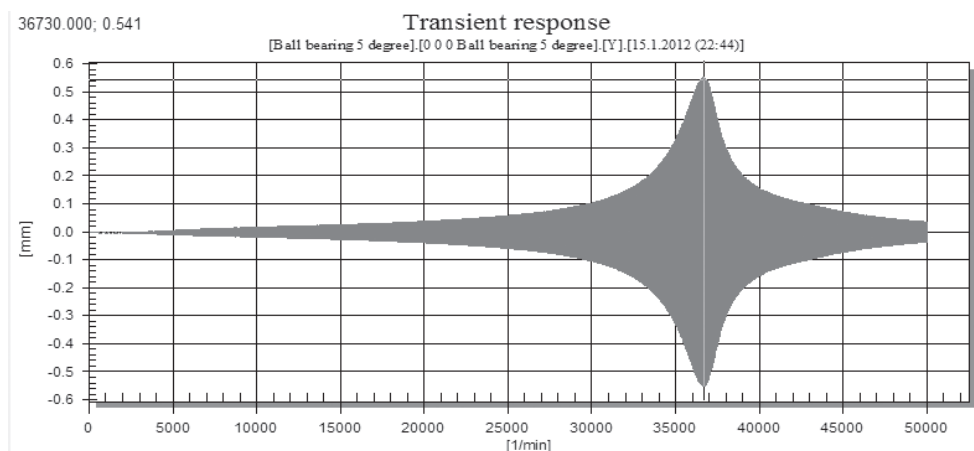


Рис. 8. Амплитудно-частотная характеристика ротора с нелинейным подшипником

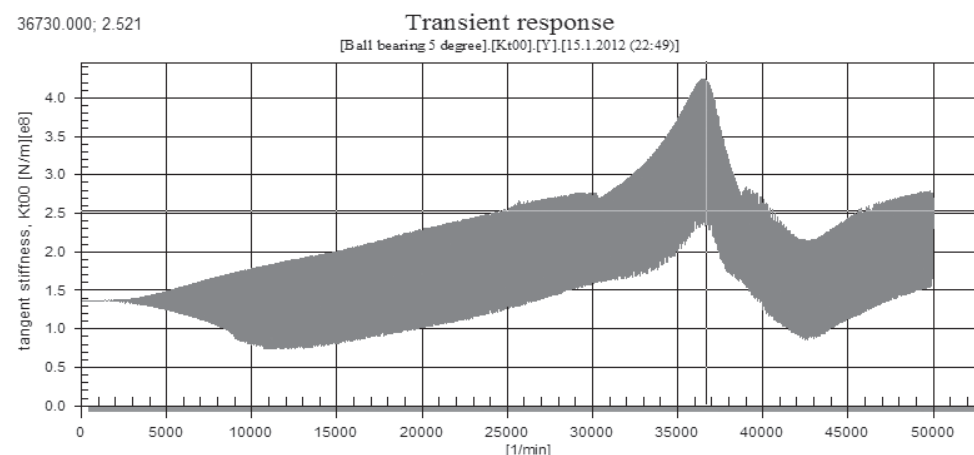


Рис. 9. Изменение коэффициента kt00 тангентной матрицы жесткости

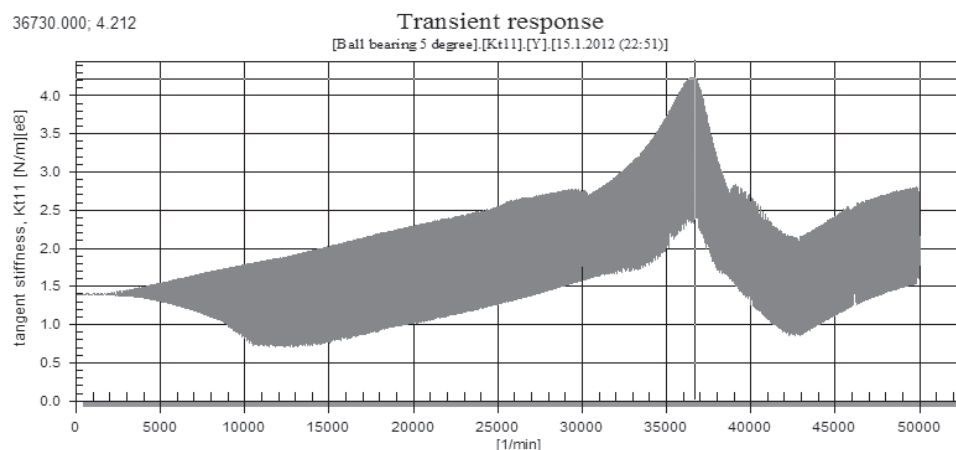


Рис. 10. Изменение коэффициента k_{t11} тангентной матрицы жесткости

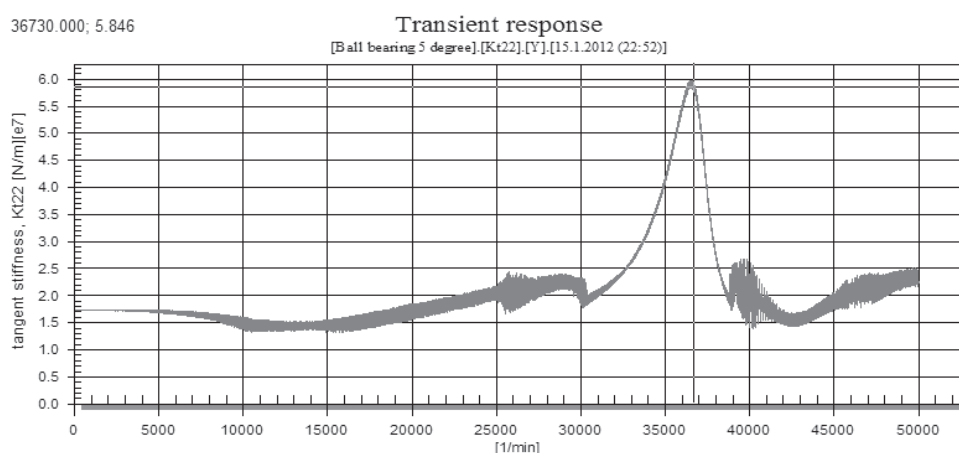


Рис. 11. Изменение коэффициента k_{t22} тангентной матрицы жесткости

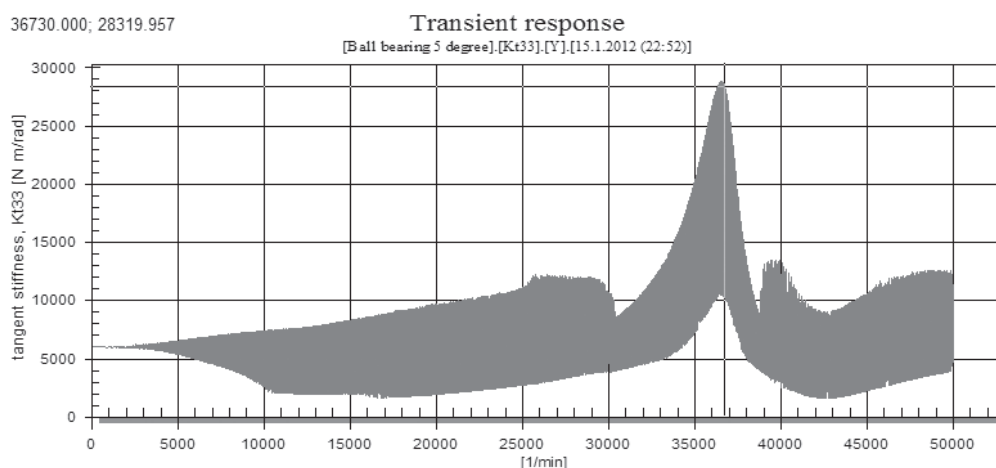


Рис. 12. Изменение коэффициента k_{t33} тангентной матрицы жесткости

Из этих рисунков видно, что коэффициенты матрицы жесткости могут существенно меняться как за один цикл нагружения, так и во всем расчетном диапазоне. При этом наибольшие изменения соответствуют резонансному режиму, при этом коэффициенты жесткости могут измениться в три раза и более.

Выводы

Разработаны математические модели, алгоритмы и программный модуль для анализа роторов, установленных на нелинейных радиально-упорных подшипниках качения. Программный модуль включен в программный комплекс DYNAMICS R4, предназначенный для анализа вибрационных харак-

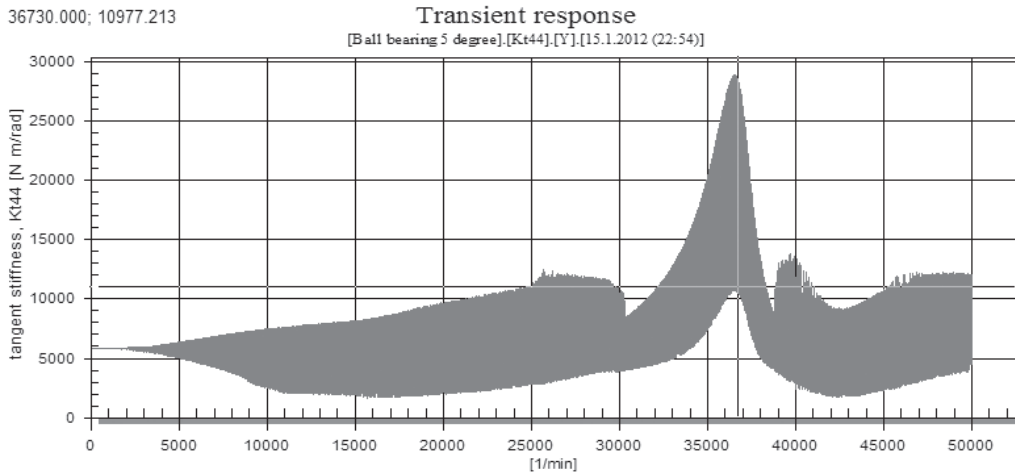


Рис. 13. Изменение коэффициента k_{t44} тангентной матрицы жесткости

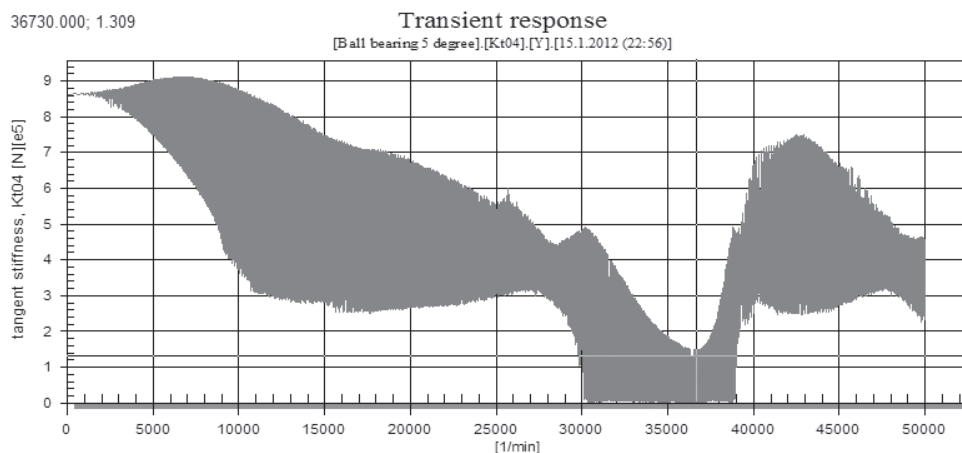


Рис. 14. Изменение коэффициента k_{t04} тангентной матрицы жесткости

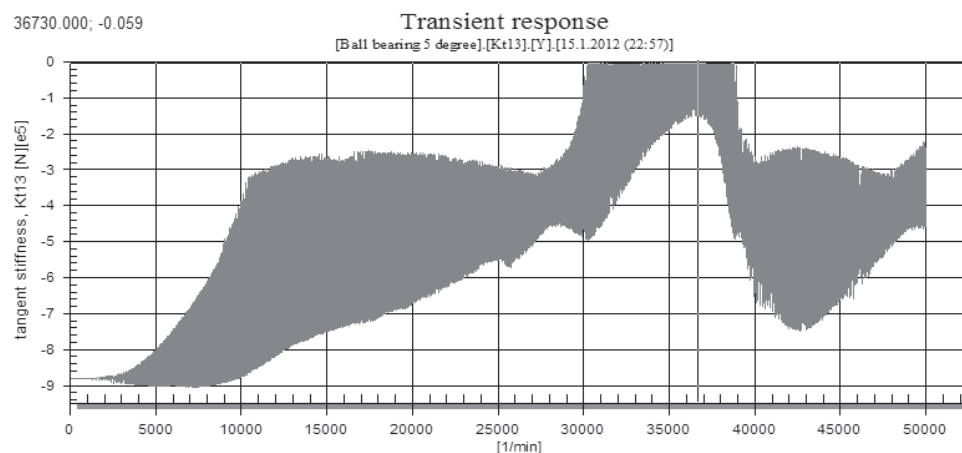


Рис. 15. Изменение коэффициента k_{t13} тангентной матрицы жесткости

теристик сложных роторных систем. Показано, что жесткостные свойства подшипника существенно зависят от действующих на него статических осевых и радиальных нагрузок, а также неуравновешенных сил. Анализ роторов с подшипниками качения в нелинейной постановке может существенно уточнить получаемые результаты.

Библиографический список

1. Хронин Д.В. Колебания в двигателях летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980.
2. David P.Fleming, J.V.Poplawski. Transient vibration prediction for rotors on ball bearings using load-dependent non-linear bearing stiffness. NASA/

- TM-2002-211829. Glenn Research Center, Cleveland, Ohio. 2002.
3. *Harris T.A.* Rolling bearing analysis. 5-th edition. A Wiley-Interscience publication. USA. November 2006.
 4. *Леонтьев М.К., Карасев В.А., Потапова О.Ю., Дегтярев С.А.* Динамика ротора в подшипниках качения // Вибрация машин: измерение, снижение, защита. 2006. ISSN 1816-1219. №4(7). С. 40-45
 5. *Jones A.B., McGrew J.M.* Rotor-bearing dynamics technology design guide: part II, ball bearings. AFAPL-TR-78-6. Part I. Air force aero propulsion laboratory. Wright Patterson air force base, Ohio. February 1978.
 6. *Demilly D., Throuverez F., Jezequel L.* Unbalance responses of rotor/stator systems with nonlinear bearings by the time finite element method. International journal of rotating machinery. 10(3): 155-162. 2004.
 7. *Greenheel L.M.* Modeling of rolling element bearing mechanics. Contract NAS 8-38607. Monthly technical progress report. Sacramento, California. February 1991.
 8. *Radivoje Mitrovic.* Analysis of the influence of internal radial clearance on the static load rating of the rolling bearing. Facta Universitatis. Mechanical Engineering, Belgrade, Yugoslavia, Vol.1, N 8, pp.1039-1047. 2001.
 9. *McFadden P.D., Smith J.D.* Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing. Journal of sound and vibration, vol.96, 1984, pp.69-82.
 10. *Feng N.S., Hahn E.J., Randall R.B.* Simulation of vibration signals from a rolling element bearing defect. University of New South Wales, Sydney, Australia. 2004.
 11. *Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я.* Подшипники качения: Справочник. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Машиностроение, 1975. — 574 с.
 12. *Спицын Н.А., Спришевский А.И.* Подшипники качения: Справочное пособие. — М.: Машгиз, 1961.
 13. *Леонтьев М.К., Иванов А.В., Дегтярев А.А., Дегтярев С.А.* Программная система расчета динамики роторов Dynamics 4. Свидетельство об отраслевой разработке №6691. Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Государственный информационный центр информационных технологий. Министерство образования Российской Федерации. 2006.
 14. *Poplawski J.V., Rumbarger J.H., Peters S.M., Flower R., Galaitis H.* Advanced Analysis Package for High Speed Multi-Bearing Shaft Systems: COBRA-AHS. Final Report, NASA Contract NAS3-00018. 2002.
 15. *Wensing J.A.* On the dynamics of ball bearings. PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands. December 1998.
 16. *Harris T.A.* Rolling bearing analysis. 5-th edition. A Wiley-Interscience publication. USA. November 2006.
 17. *Tiwari M., Gupta K., Prakash Om.* Non-linear dynamic analysis of a rigid rotor supported on deep groove ball bearings. Proceedings of the 7th International Symposium on transport phenomena and dynamics of rotating machinery. Bird Rock Publishing, pp.960-969. 1998.
 18. *F.M.A.El-Saeidy.* Finite element modeling of rotor shaft rolling element bearing system with consideration of bearing nonlinearities. J.Vib.Control, 4, pp.541-602. 1998.
 19. *Feng N.S., Hahn E.J.* Rolling element bearing non-linearity effects. ASME Paper No.2000-GT-391. 2000.
 20. *Jones A.B.* A General theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. ASME J. Basic Eng., 82(2). 1960.
 21. *Mul J.M. de, Vree J.M., Maas D.A.* Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction- part I: general theory and application to ball bearings, Journal of Tribology, vol.111, pp.142-148, January 1989.
 22. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. В.Р. Челомей. — Т.3. Колебания машин, конструкций и их элементов/Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. — М.: Машиностроение, 1980.