

УДК 921.4

ДИНАМИКА РОТОРНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКОСТНЫМИ ЩЕЛЕВЫМИ УПЛОТНЕНИЯМИ

А.В. Давыдов, С.А. Дегтярев, А.В. Иванов, М.К. Леонтьев

Представлена математическая модель гидродинамического щелевого уплотнения – плавающего кольца и методика, предназначенные для исследования роторной динамики жидкостных насосов. Приводится алгоритм определения гидродинамической силы и реакции уплотнения в составе роторной системы. На примере быстровращающегося модельного ротора со щелевым уплотнением исследуется движение вала ротора и кольца, а также определяется граница устойчивости ротора.

Ключевые слова: роторная динамика, щелевые уплотнения, плавающее кольцо

Перспективным направлением совершенствования турбомашин является увеличение их мощности за счет повышения скоростей вращения ротора. Вследствие этого достигается также снижение габаритных и массовых характеристик, что особенно важно для двигателей летательных аппаратов. Например, известно, что полезная мощность лопастного насоса возрастает пропорционально наружному диаметру рабочего колеса и скорости вращения. В настоящее время рассматриваются перспективы создания ТНА ракетных двигателей с давлением подачи более 100 МПа, температурой газа перед турбиной до 1500 К, с рабочими скоростями роторных поверхностей уплотнений свыше 600 м/с.

Перспективы роста частот вращения роторов ТНА с точки зрения повышения эффективности насосных агрегатов положительно оцениваются как отечественными, так и зарубежными специалистами. Тенденции роста окружных скоростей в насосах и турбинах ТНА можно проследить на рис. 1 [1].

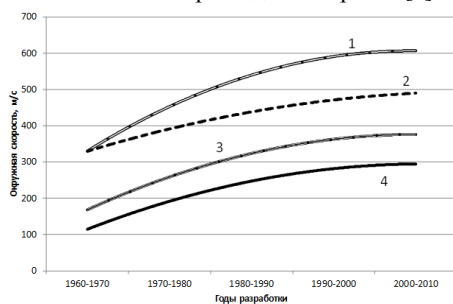


Рис. 1. Тенденции изменения окружных скоростей в ТНА 1 – окружная скорость на наружном диаметре крыльчаток водородных насосов; 2 – окружная скорость на среднем диаметре турбин водородных ТНА, 3 – окружная скорость на среднем диаметре турбин кислородных ТНА, 4 – окружная скорость на наружном диаметре крыльчаток кислородных насосов

Давыдов Аркадий Валентинович - МАИ, аспирант, e-mail: davidovarc@alfatran.com

Дегтярев Сергей Александрович, -ООО "Альфа-Транзит", руководитель направления, e-mail: degs@alfatran.com

Иванов Андрей Владимирович, -КБХА, заместитель главного конструктора, канд. техн. наук, e-mail: iav308@inbox.ru

Леонтьев Михаил Константинович, -МАИ, проф. д-р техн. наук, e-mail: lem@alfatran.com.

При этом частоты вращения роторов достигают 140000 об/мин. Особенно высокий рост окружных скоростей характерен для водородных насосов кислородно-водородных ЖРД.

Для уменьшения объемных потерь в ТНА применяются всевозможные уплотнения. Наиболее часто применяются гидродинамические уплотнения – щелевые уплотнения различных типов. Выполненные экспериментальные исследования балансировки ротора центробежного насоса показывают, что причиной повышенного уровня вибрации роторов на заданных частотах вращения является не столько его остаточный дисбаланс, сколько влияние опор и щелевых уплотнений [2]. Проведение дополнительной балансировки ротора насоса на номинальном режиме для роторов с плохо сконструированными и рассчитанными узлами уплотнений, как правило, не улучшает его вибрационных характеристик.

Уплотнения проточной части водородных насосов оказывают существенное влияние на динамические характеристики роторов. Например, в процессе доводки водородного ТНА двигателя SSME межорбитального транспортного космического корабля многократного использования «Space Shuttle» выявились дефекты роторной системы, связанные с уплотнительными узлами. Следует отметить, что практически все роторы, используемых в настоящее время в ЖРД, водородных насосов работают с рабочей частотой вращения, превышающей первую критическую частоту вращения, а ротор водородного насоса японского двигателя LE-7 при выходе на рабочую частоту вращения последовательно проходит три критические частоты вращения. Таким образом, уплотнения проточной части водородных насосов в определенные моменты времени работают в условиях перехода ротора через критические частоты вращения, т.е. в условиях повышенных амплитуд колебаний уплотнительных поверхностей ротора. Так же уплотнения из-за их большого числа играют роль дополнительных опор и гидродинамических демпферов. Например, демпфирование колебаний при переходе критических частот вращения в водородном насосе двигателя VINCI, разработанного фирмой

Спецста во Франции, осуществляется за счет развитых в осевом направлении щелевых уплотнений.

Среди разновидностей щелевых уплотнений уплотнение с кольцом. Такие уплотнения широко применяются в ТНА ракетных двигателей в качестве уплотнительного элемента для минимизации перетечек жидкости. Кольца (их часто называют плавающими) за счет их начального самоцентрирования в процессе работы позволяют обеспечить равномерный радиальный зазор между корпусом и вращающимся валом. Обычно, кольцо зафиксировано от вращения и поджимается к статору пружиной для предотвращения осевых перемещений и создания начального уплотнительного эффекта, пока отсутствует перепад давлений. При вращении вала возникающая в щели уплотнения гидродинамическая сила стремится переместить кольцо в радиальном направлении. Движению кольца препятствует сила трения. В случае, когда гидродинамическая сила превышает силу трения, кольцо начинает двигаться вслед за ротором. Как только гидродинамическая сила становится меньше силы трения скольжения, кольцо начинает останавливаться. Кольцо может зафиксироваться с эксцентриситетом по отношению к валу.

Существует большое количество работ российских и зарубежных авторов, в которых рассматриваются вопросы обеспечения работоспособности таких уплотнений. В работе [3] приведен расчет минимальной силы поджатия пружины, предотвращающий угловые колебания кольца на всех режимах работы. В работе [4] приводятся расчеты возможного касания ротора о статор, приводящее к выработкам, затирианиям и износу элементов уплотнения. Показаны также условия возникновения режима обкатывания, как причины этих явлений.

Одной из важнейших задач в моделировании динамики роторов ТНА является определение гидродинамической силы в щелевом уплотнении. Физическое объяснение происхождения радиальной гидродинамической центрирующей силы в щелевом уплотнении впервые дал А.А. Ломакин в 1953 году [5]. Ранней работой, в которой исследовалось влияние уплотнений на динамику роторов, явилась работа Рудиса и Марцинковского [6]. За рубежом впервые объяснил влияние сил в щелевом уплотнении на динамику ротора турбокомпрессора и получил его динамические коэффициенты Блэк [7, 8]. Чайлдс и Андрес продолжили разработку математических моделей, провели исследования работы щелевых уплотнений и их экспериментальную проверку [9], [10]. Эти модели построены для условий турбулентного потока, и позволяют определять как

гидродинамические силы, так и динамические коэффициенты жесткости и демпфирования.

Целью настоящей работы явилась разработка методики и математической модели уплотнения с плавающим кольцом и их применение в задачах динамики быстровращающихся роторов. Анализ модели роторной системы с уплотнением проводился в программной системе DYNAMICS R4 (www.alfatran.com).

Геометрия щелевого уплотнения

В начальный момент времени уплотнительное кольцо рассматривается неподвижным и центрированным, т.е. уплотнение работает как простое щелевое. Кольцо начинает движение, когда гидродинамическая сила преодолевает силу трения покоя.

На рис. 2 показана геометрия эквивалентного кольца, к которому можно привести плавающее кольцо любой другой формы, а также действующие на него в каждый момент времени силы:

- P_1 - сила от давления жидкости на входе в уплотнение;
- P_2 - сила от давления жидкости на выходе из уплотнения;
- F_ω - сила инерции плавающего кольца;
- F_g - гидродинамическая сила в щели уплотнения;
- F_s - сила от действия пружины;
- F_r - сила реакции, возникающая на кольце от перепада давлений P_1 и P_2 и пружины;
- F_μ - сила трения по контактной поверхности кольца и корпуса;

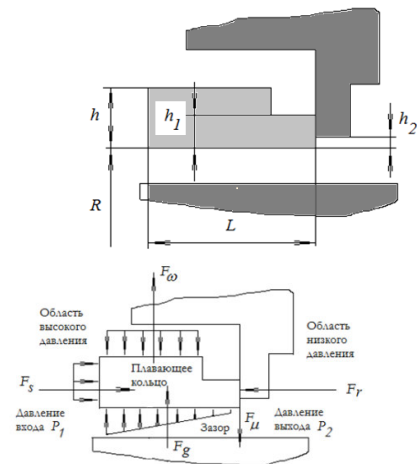


Рис. 2. Геометрия эквивалентного кольца и действующие на него силы

Отметим некоторые допущения, которые мы принимаем для модели кольца. Кольцо рассматривается идеальным без какой либо диффузорности или конфузорности его геометрии. Не учитывается неравномерность зазора между кольцом и валом, отклонения формы уплотнительных поверхностей в продольном и

поперечном направлении. Не учитывается изменение силы трения при изменении площади контакта кольца с корпусом в случае перемещения кольца.

Модель роторной системы с кольцом

Схема упрощенной модели ротора с плавающим кольцом представлена на рис. 3. Ротор общей массой 7.24 кг установлен и вращается в жестком корпусе на двух опорах- связях 1, 2. Радиальная жесткость опор составляет $0.1 \cdot 10^9$ Н/м, демпфирование в опорах - 200 Н·с/м. Корпус ротора закреплен на двух опорах - моделируются абсолютно жесткими связями 3 и 4. В центральной части вала приложен дисбаланс 0.5 г·см.

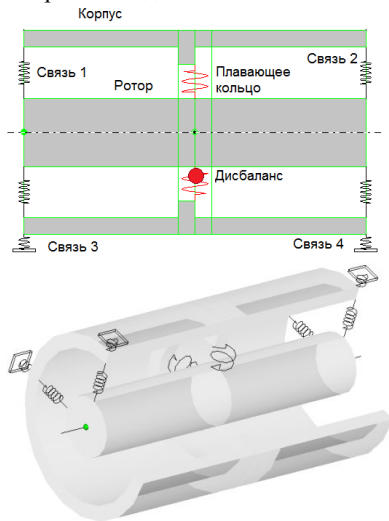


Рис. 3. Модель роторной системы с плавающим кольцом (двухмерное и трехмерное представление)

Параметры щелевой части уплотнения представлены в табл. 1. Давление, P_1 и P_2 нарастает по параболическому закону, начиная с минимального перепада в 0.05 МПа до указанного в таблице.

Таблица 1

Щель		
Параметр	Значение	Описание
R	20	Радиус вала, мм
L	7.5	Длина щели, мм
$\mu_{ж}$	13.8e-6	Динамическая вязкость (жидкий водород), Па·с
ρ	70.8	Плотность жидкости, кг/м ³
P_1	7.013e+6	Давление на входе на режиме 90000 об/мин, МПа
P_2	0.755e+6	Давление на выходе на режиме 90000 об/мин, МПа
δ	0.027	Радиальный зазор, мм
α	0.5	Коэффициент закрутки жидкости на входе в уплотнение
ζ	0.1	Коэффициент потерь на входе в уплотнение

Параметры кольца представлены в табл. 2. Коэффициенты трения покоя и трения скольжения приняты одинаковыми.

Таблица 2

Кольцо		
Параметр	Значение	Описание
m_{ring}	45	Масса кольца, г
h_1	1.7	Толщина кольца в зоне контакта с корпусом, мм
h_2	0.5	Толщина кольца, не имеющая контакта с корпусом, мм
μ_{rest}	0.1	Коэффициент трения покоя
$\mu_{sliding}$	0.1	Коэффициент трения скольжения
F_s	10	Сила поджатия от пружины, Н
v_{min}	1	Минимальная скорость проскальзывания кольца, мм/с

Линейный анализ роторной системы

Применение линейной модели позволяет получить собственные частоты и формы колебаний роторной системы по режимам, а также по изменению логарифмического декремента форм колебаний определить ее границу устойчивости.

Реакция уплотнения на динамическую систему определяется гидродинамической силой, возникающей в щели уплотнения. В линейном анализе кольцо является неподвижным и уплотнение является обычным щелевым.

С учетом сказанного общее уравнение движения ротора в матричной форме и в линеаризованной постановке может быть записано как

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}_{\delta\delta} + \{R^{seal}\}, \quad (1)$$

где $[M]$, $[C]$, $[K]$ - квадратные матрицы инерции, демпфирования и гироскопических сил, и жесткости соответственно, полученные для конечно-элементной модели; $\{\ddot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{q\}$ - векторы-столбцы обобщенных ускорений, скоростей и перемещений соответственно; $\{F_{\delta\delta}\}$ - вектор-столбец неуравновешенных сил; $\{R^{seal}\}$ - вектор-столбец реакции уплотнения.

Для определения гидродинамической силы может быть использован любой алгоритм, связывающий ее значение с перемещениями и скоростями вала. В дальнейшем, будет использоваться алгоритм Чайлдса [9], в котором гидродинамическая сила определяется через коэффициенты жесткости K_{xx} , K_{xy} и демпфирования C_{xx} , C_{xy} . Эти коэффициенты являются функцией геометрии уплотнения, частоты вращения ротора, свойств жидкости, перепада давления и определяются для центрального положения ротора в зазоре.

$$\begin{Bmatrix} R_x^{seal} \\ R_y^{seal} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ -K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ -C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}.$$

На рис. 4 показано изменение коэффициентов жесткости и демпфирования уплотнения в исследуемом диапазоне частот вращения ротора.

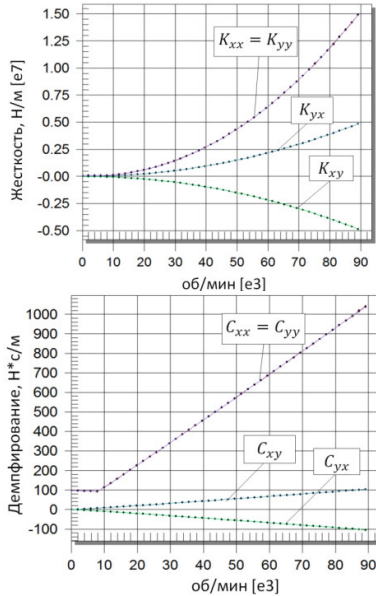


Рис. 4. Кривые коэффициентов жесткости и демпфирования

Как видим, перекрестные жесткости и демпфирования имеют одинаковые значения, но разных знаков, что свидетельствует о возможной потере устойчивости ротора и необходимости определения ее границы.

На рис. 5 показана полученная карта собственных частот (диаграмма Кемпбелла) роторной системы в диапазоне до 90000 об/мин. В рассматриваемом диапазоне собственных частот до 225000 1/мин для не вращающегося ротора найдется две частоты собственных колебаний. При вращении эти частоты разделяются на частоты, соответствующие прямой прецессии (восходящие ветви диаграммы) и обратной (нисходящие ветви диаграммы). Первые две частоты слились в одну линию. На карте показаны формы колебаний ротора, соответствующие этим частотам.

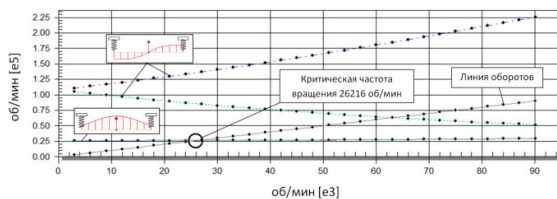


Рис. 5. Карта собственных частот роторной системы

Изменение логарифмического декремента для полученных форм колебаний показано на рис. 6. Из

рисунка следует, что система теряет устойчивость, когда логарифмический декремент меняет свой знак на отрицательный, т.е. на режиме ~60750 об/мин.

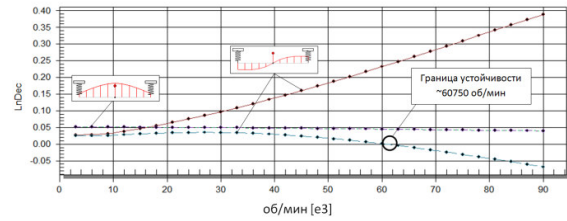


Рис. 6. Карта устойчивости роторной системы

Собственную частоту, по которой ротор теряет устойчивость, можно определить из диаграммы зависимости логарифмического декремента от частоты собственных колебаний, рис. 7. Потеря устойчивости происходит по собственной частоте 27577 1/мин и форме колебаний, показанной на рисунке.

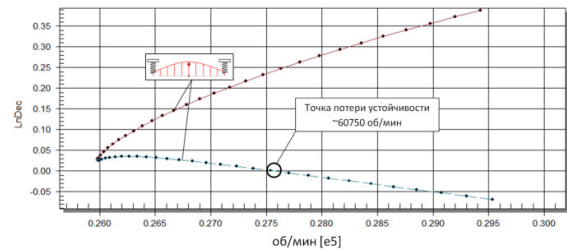


Рис. 7. Карта зависимости логарифмического декремента от частоты собственных колебаний

Нелинейный анализ роторной системы

Предполагается, что кольцо обладает инерцией и может двигаться, т.е. роторная система становится нелинейной. Тогда решение уравнения (1) получается его прямым интегрированием с определением на каждом шаге интегрирования реакции уплотнения.

Рассмотрим алгоритм определения реакции уплотнения $\{R^{seal}\}$ на движение вала ротора. В начальный момент времени уплотнительное кольцо рассматривается неподвижным и центрированным, т.е. уплотнение работает как простое щелевое. Кольцо начинает движение, когда гидродинамическая сила преодолевает силу трения покоя.

Сила трения покоя и скольжения рассчитываются как

$$\begin{aligned} |\bar{F}_g| &> F_{\mu}^{rest} \\ F_{\mu}^{rest} &= \mu_{rest} * F_r; \\ F_{\mu}^{sliding} &= \mu_{sliding} * F_r; \\ F_r &= (P_1 * S_{h1} - P_2 * S_{h2} + F_s), \end{aligned}$$

где μ_{rest} и $\mu_{sliding}$ - коэффициенты трения покоя и скольжения соответственно; S_{h1} и S_{h2} - площади, соответствующие размерам кольца h_1 и h_2 .

Если скорость кольца меньше минимальной скорости проскальзывания, то оно считается неподвижным:

$$|\bar{v}_n^{ring}| < v_{min}.$$

Можно выделить три состояния, в которых может находиться кольцо. Первое, когда кольцо остановлено. Вектор реакции кольца в уплотнении равен и противоположен направлению вектора гидродинамической силы в щели:

$$\bar{R}^{seal} = -\bar{F}_g.$$

Второе, когда кольцо неподвижно, но гидродинамическая сила стала равна силе трения покоя. Тогда реакция кольца

$$\bar{R}^{seal} = -\bar{F}_\mu^{rest}.$$

и кольцо получает ускорение

$$\bar{a}_n^{ring} = \bar{F}_\omega / m^{ring},$$

где m^{ring} - масса кольца; $\bar{F}_\omega = (\bar{F}_g - \bar{F}_\mu^{rest})$.

Третье, когда кольцо движется с ускорением. Вектор реакции по величине будет равен силе трения скольжения

$$\bar{R}^{seal} = -\bar{F}_\mu^{sliding}.$$

и движется с ускорением

$$\bar{a}_n^{ring} = (\bar{F}_g - \bar{F}_\mu^{sliding}) / m^{ring}.$$

С учетом смещений вала и кольца от центрального положения и скорости их движения значение гидродинамической силы в проекциях на оси X и Y можно определить через коэффициенты жесткости K_{xx}, K_{xy} и демпфирования C_{xx}, C_{xy} , полученные для центрального положения ротора в зазоре.

$$F_{gx} = -(K_{xx} * \Delta u_x + K_{xy} * \Delta u_y + C_{xx} * \Delta v_x + C_{xy} * \Delta v_y);$$

$$F_{gy} = -(K_{yx} * \Delta u_x + K_{yy} * \Delta u_y + C_{yx} * \Delta v_x + C_{yy} * \Delta v_y).$$

где:

$$\Delta u_x = u_x^{shaft} - u_x^{ring}; \Delta u_y = u_y^{shaft} - u_y^{ring};$$

$$\Delta v_x = v_x^{shaft} - v_x^{ring}; \Delta v_y = v_y^{shaft} - v_y^{ring}.$$

Работу алгоритма по определению реакции кольца можно представить в виде блок-схемы, рис. 8. В начальный момент времени кольцо занимает центральное положение. Входными параметрами для расчета реакции кольца на n -ом шаге интегрирования являются

$$u_x^{shaft}, u_y^{shaft}, v_x^{shaft}, v_y^{shaft}, \Delta t_n.$$

На рис. 9 показана амплитудно-временная характеристика ротора в месте установки кольца, полученная в процессе нестационарного анализа по вышеприведенному алгоритму. Выделяется две зоны повышенных вибраций - в диапазоне 26000-30000 об/мин, что соответствует первой критической частоте вращения ротора, и в диапазоне от 83000 об/мин, что соответствует потере устойчивости ротора от гидродинамических сил в уплотнении.

Визуальная граница потери устойчивости ротора от гидродинамических сил в уплотнении находится около 83000 об/мин. Для уточнения ее положения был использован метод, описанный в [12]. На постоянных режимах 60000 об/мин и 61000

об/мин к системе был приложен импульс 100 Н, длительностью 0.01 секунды, рис. 10. Импульс на 60000 об/мин не приводит к потере устойчивости (амплитуды затухают). Амплитуды от действия импульса на 61000 об/мин растут. Отсюда следует, что граница лежит в промежутке между этими частотами вращения ротора и близка к границе, полученной для линейной модели.

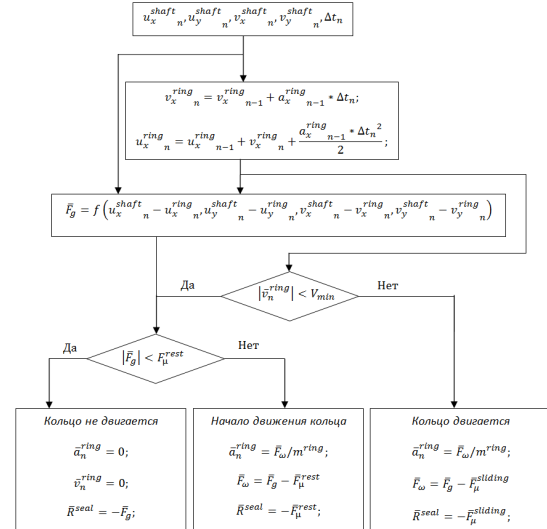


Рис.8. Блок-схема алгоритма для определения реакции уплотнения

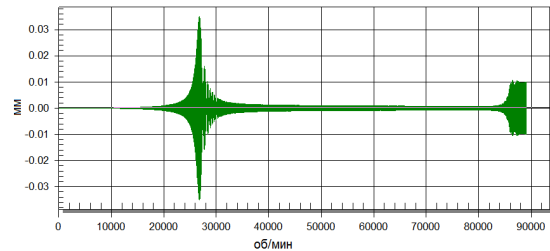


Рис. 9. Амплитудно-временная характеристика ротора по перемещению

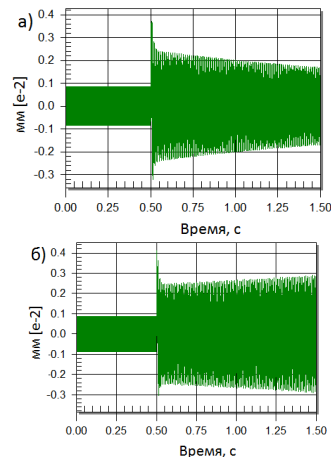


Рис. 10. Временной сигнал от импульсного воздействия на 0.05 секунды: а) до границы устойчивости (60000 об/мин), б) после (61000 об/мин)

Максимальное значение амплитуды ротора на резонансе, полученном в нестационарном анализе (рис. 9), соответствует частоте ~ 26805 1/мин, тогда как в линейном расчете критическая частота 26216 1/мин, т.е. плавающее кольцо несколько ужесточило ротор.

Перевод полученного временного сигнала в частотную область (рис. 11) показывает, что потеря устойчивости происходит с частотой 29297 1/мин, которая несколько отличается от частоты, полученной для линеаризованной модели - 27577 1/мин.

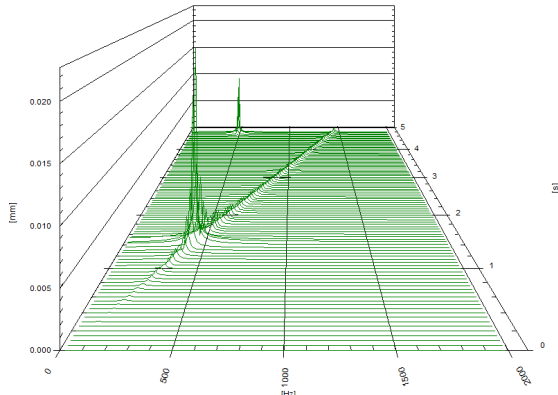


Рис.11. Каскадная диаграмма вибрационных спектров

На рис. 12 показано изменения реакции кольца и силы трения по режимам. Реакция кольца ограничена силой трения.

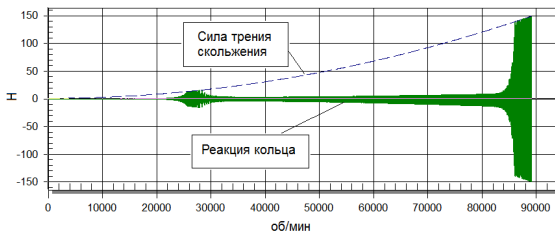


Рис. 12 Реакция кольца и сила трения

Интерес представляет картина движения кольца в зоне резонанса, рис. 13.

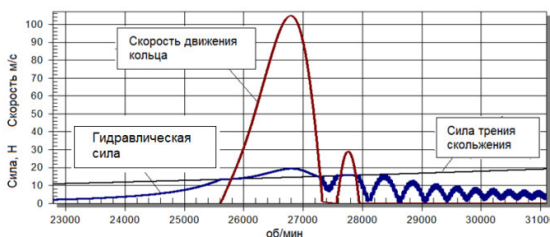


Рис.13. Движение кольца при переходе ротором резонансной частоты

Как видно из рисунка, гидродинамическая сила в зазоре возрастает до значения силы трения покоя. Далее ее значение превосходит силу трения и кольцо начинает двигаться, скорость кольца

вместе с ростом гидродинамической силы растет. После того как гидродинамическая сила начинает уменьшаться, снижается и скорость движения кольца. Кольцо останавливается с некоторым эксцентриситетом относительно вала за счет преобладания силы трения над гидродинамической. Эксцентриситет кольца в дальнейшем вызывает некоторые колебания гидродинамической силы. Циклов движения и остановки кольца может быть несколько. В нашем случае их всего два.

Картина движения кольца в зоне потери устойчивости от течения жидкости носит чисто академический характер (работа ротора вблизи и после границы устойчивости не допускается) и подробно показана на рис. 14.

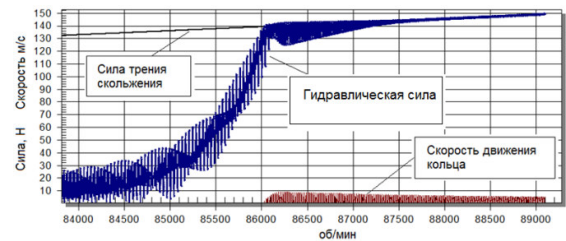


Рис. 14. Движение кольца в зоне потери ротором устойчивости

Ниже представлены орбиты движения кольца и ротора на различных режимах в области потери устойчивости на временном интервале 0.001 сек. Движение ротора при остановленном кольце круговое, рис. 15. Амплитуды движения ротора при потере устойчивости растут до момента начала движения кольца, а затем сохраняются на уровне 10 мкм, рис.16 а. Амплитуды кольца не превышают 1.5 мкм, характер движения прерывистый, рис.16 б. На этом же рисунке видны места резкого излома траектории движения кольца – места его остановки.

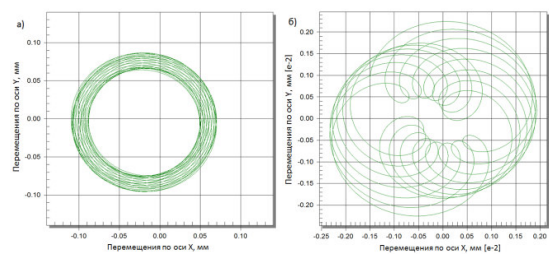


Рис 15. Орбиты движения ротора (кольцо стоит): а) на режиме 83000 об/мин; б) на режиме 84500 об/мин

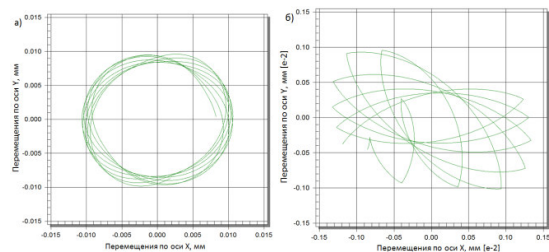


Рис 16. Орбиты движения на режиме 86000 об/мин: а) ротора; б) кольца (начало движения)

Орбиты движения на режиме 89000 об/мин показаны на рис. 17. Следует отметить, что кольцо ограничивает амплитуды колебаний ротора и не дает им развиваться до опасных значений.

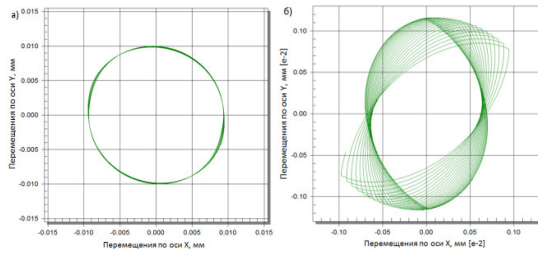


Рис .17. Орбиты движения на режиме 89000 об/мин: а) ротора; б) кольца

В реальной конструкции уплотнения при определенных условиях возможен контакт вала ротора и кольца. Этот факт должен проверяться в любом случае. На рис. 18 показаны орбиты абсолютного движения вала в зазоре кольца на резонансе в пределах одного цикла. Точки находятся в начальном положении вала и кольца и показывают фазовый сдвиг векторов перемещений вала и кольца. В нашем случае контакта не происходит.

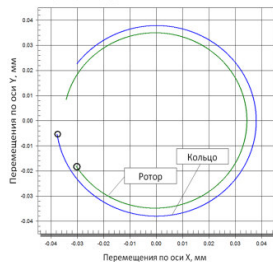


Рис. 18. Проверка контакта вала с кольцом

Выводы

Среди основных выводов по представленной методике и результатам ее применения можно отметить следующие. Анализ роторов с щелевыми уплотнениями может проводиться как в стационарной постановке (линеаризованная модель уплотнения), так и в нестационарной (нелинейная модель уплотнения).

В стационарной постановке методика позволяет учитывать несимметрию матриц жесткости и демпфирования щелевых уплотнений, получать амплитудно-частотные характеристики ротора и определять его границу устойчивости ротора. В нестационарной постановке методика учитывает инерцию кольца, гидродинамическую силу в щели, силы трения кольца о корпус. Она позволяет получать амплитудно-временные характеристики движения вала ротора и кольца, определять траектории их движения, поведение кольца при переходе через резонанс,

контролировать возможное касание вала и кольца, определять более точно границу потери устойчивости ротора под действием гидродинамической силы.

Методика позволяет также определять необходимую жесткость поджимающей кольцо пружины, уточнять конфигурацию кольца, от которой зависит величина гидравлической силы прижатия торца кольца к корпусу.

Список использованных источников

1. Иванов А.В. Турбонасосные агрегаты кислородно-водородных ЖРД: монография, Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011. 283 с.
2. Геращенко Б.И. Динамика закритических роторов лопаточных машин. М.: Компания Спутник+, 2000 – 250 с.
3. Иванов А.В. Некоторые вопросы проектирования уплотнений с полуподвижными кольцами для насосов ТНА / А.В. Иванов // Разработка, производство и эксплуатация turbo-, электронасосных агрегатов и систем на их основе: труды I Международной научно-технической конференции "СИНТ'01". – Воронеж: ООО РИФ "Кварта", 2001. – С. 236 – 238.
4. Дмитренко А.И. Совершенствование уплотнений с полуподвижными кольцами для проточной части насосов ТНА ЖРД / А.И. Дмитренко, А.В. Иванов, А.Г. Кравченко // Научно-технический юбилейный сборник. КБ химавтоматики. – ИПФ "Воронеж", 2001. – С. 357 – 363.
5. Бедчер Ф.С., Ломакин А.А. Определение критического числа оборотов ротора насоса с учетом сил, возникающих в уплотнениях// Паро- и газотурбостроение. – 1957. - Вып.5. - С. 249-269.
6. М. А. Рудис, В. А. Марцинковский, Некоторые вопросы динамики роторов центробежных насосов / Котлотурбостроение: сборник трудов ЦКТИ. – 1964. – Вып. 44.
7. H. Black, Effects of Hydraulic Forces on Annular Pressure Seals on the Vibrations of Centrifugal Pump Rotors, Journal of Mechanical Engineering Science, 1969, 11(2), pp. 206-213.
8. Black, H. F., Jenssen, D. N., Dynamic Hybrid Bearing Characteristics of Annular Controlled Leakage Seals, Proc Instn Mech Engrs, 1970, Vol. 184, pp. 92-100.
9. Childs D.W. "Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling and analysis". JOHN WILEY & SONS, INC.1993. pp. 476.

10. L. San Andrés, Analysis of Variable Fluid Properties, Turbulent Annular Seals, ASME Journal of Tribology, 113, pp. 694-702, 1991.

11. Леонтьев М.К., Иванов А.В. Модальный анализ динамических систем роторов. “Известия

высших учебных заведений. Авиационная техника”. 2005, №3. С. 31-35.

12. Леонтьев М.К., Дегтярев С.А., Давыдов А.В., «Динамическая устойчивость ротора турбогенератора», журнал «Газотурбинные технологии», №4 2012 г.

