

Учет податливости колец при определении контактных усилий в радиальном роликовом подшипнике качения

Иванников В.В.¹, Дегтярев С.А.¹, Попов В.В.², Сорокин Ф.Д.², and Леонтьев М.К.³

¹НТЦ Альфа–Транзит, г. Химки; vvivannikov@gmail.com, degs@alfatran.com

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва; vvropov.bmstu@gmail.com, sorokin_fd@mail.ru

³Московский авиационный институт, г. Москва; lemka@alfatran.com

Для корректной оценки долговечности подшипников качения важно достоверное определение величин радиальных контактных усилий, действующих на тела качения со стороны колец. Последние при этом чаще всего принимаются абсолютно жесткими. Однако, в современных авиационных двигателях такое допущение нельзя считать справедливым, т.к. кольца подшипников являются относительно тонкими. Для таких геометрий пренебрежение податливостью колец может давать завышенные (вплоть до нескольких раз) величины радиальных усилий. Для учета этого эффекта в статье предлагаются 4 различных подхода. Работоспособность методик показана в численном примере, даны комментарии по их применимости в тех или иных условиях.

Ключевые слова: радиальный подшипник качения, роликовый подшипник, авиационные двигатели, математическая модель

1 Введение

Задача вычисления внутренних усилий в подшипнике качения достаточно хорошо изучена за последние 50 лет, т.к. их корректное определение является важной отправной точкой для получения достоверной оценки долговечности опорного узла. При этом большинство существующих методик рассматривает кольца абсолютно жесткими, в то время как для современных авиационных двигателей эффект их податливости может оказывать существенное влияние на перераспределение усилий внутри подшипника. Так, кольца радиальных подшипников авиадвигателей явля-

ются достаточно тонкими, ощутимой жесткости не добавляет и конструкция самого опорного узла — валы роторов полые, а корпуса тонкостенные. А если такой подшипник работает в условиях отрицательного зазора (далее — натяга), то величины радиальных усилий, получаемые в расчетах без учета податливости элементов опорного узла, могут в несколько раз отличаться от возникающих в действительности.

В общем случае деформированное состояние колец даже численно определить достаточно сложно (а аналитически — невозможно вовсе), и для этого требуется решение трехмерной конечно-элементной задачи с большим числом степеней свободы. Из-за невозможности однозначно определить кинематические граничные условия для колец часто приходится включать в модель еще и прилегающие участки вала и корпуса, что дополнительно повышает требования к вычислительным ресурсам. Поэтому, разумно обратиться к построению упрощенных моделей расчета подшипника.

Пожалуй, одну из первых попыток учесть податливость колец предприняли Джонс и Харрис [1], рассмотрев в своей модели подшипника качения деформации внешнего кольца в составе опоры промежуточной шестерни планетарной передачи. Филетти и Румбаргер [2] разбивали кольцо на набор балочных конечных элементов, а для тел качения, находящихся в контакте, были применены линейные одномерные упругие элементы. Сама сборка кольца и тел качения имела два узла крепления к опоре. Модель продемонстрировала хорошую сходимость с экспериментом, однако необходимость априорного знания о способе закрепления кольца существенно ограничивала применимость подхода. Кроме того, как и предыдущая работа, данная модель учитывала деформации лишь одного из колец.

Куда более полная модель расчета усилий в подшипнике с учетом деформации обоих колец была предложена Каваяро *и соавт.* [3] и в дальнейшем доработана Лебланом *и соавт.* [4]. В отличие от предыдущих попыток, задача определения деформированного состояния колец ставилась в терминах сил, кроме того, модель учитывала такие явления, как расширение колец под действием инерции их вращения, движение сепаратора и присутствие смазки.

Среди соотечественников стоит выделить Балякина *и соавт.* [5], также отмечавших необходимость учета изгибной податливости колец подшипника при проектировании опор ГТД. В предложенном авторами подходе местные деформации деталей считаются линейно пропорциональными усилиям в зоне контакта.

В рамках настоящей работы предлагается разработка и сравнение нескольких методик учета радиальной деформации колец (а также тонкостенных валов и корпусов) при построении модели радиального роликового подшипника качения:

- 1) предварительный учет деформаций от эквидистантно распределенных равных по величине радиальных усилий,
- 2) упрощенная посекторальная схема деформации кольца для эквидистантного распределения не равных по величине радиальных усилий,
- 3) воспроизведение деформированного состояния кольца с помощью разложения в ряд Фурье в случае нагружения произвольными радиальными силами,
- 4) построение балочной конечно-элементной модели со специальными нелинейными элементами в местах установки тел качения для общего вида нагружения.

Будут обозначены условия их применимости и отмечены достоинства и недостатки. Работоспособность подходов проверяется с помощью численного примера, который верифицируется коммерческим конечно-элементным пакетом. Немаловажной задачей при разработке и выборе методики является нахождение баланса между точностью расчета и скоростью вычислений, т.к. конечный элемент нелинейного подшипника с податливыми кольцами может работать в составе сложных моделей ГТД.

2 Модель радиального подшипника

2.1 Определение равновесия радиального подшипника

Рассмотрим подшипник как элемент с двумя узлами O_i и O_e , которые помещены в центрах внутреннего и наружного колец, соответственно, см. рисунок 1. Узел O_e , связанный с наружным кольцом, примем неподвижным и объявим в нем декартову систему координат x, y, z . Под действием внешней нагрузки

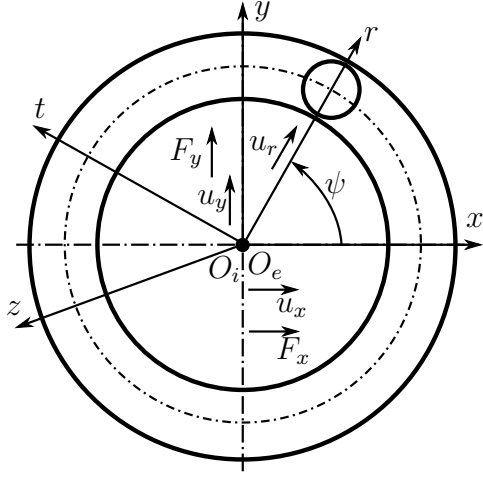


Рис. 1: Система координат подшипника и схема его нагружения.

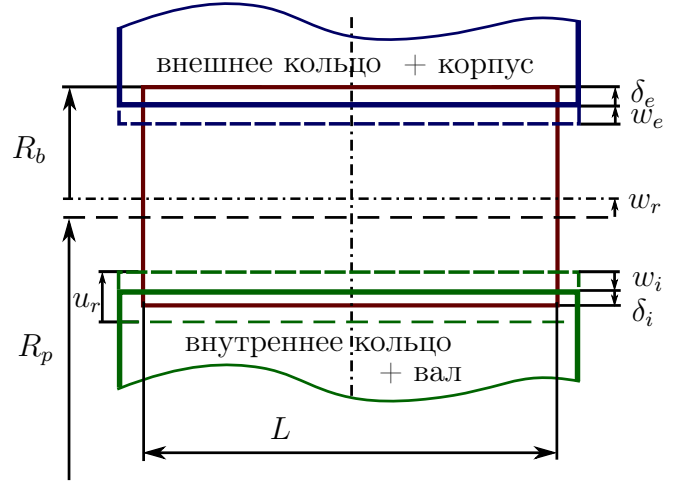


Рис. 2: Ролик, зажатый между кольцами.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

внутреннее кольцо совершает малые перемещения

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

относительно узла O_e . Рассматриваемая модель радиального подшипника не способна воспринимать осевую силу, поэтому перемещение u_z не учитывается. Перекосом колец на данном этапе также пренебрегаем.

Радиальное смещение внутреннего кольца в системе координат j -го ролика с угловым положением $\psi_j = (j - 1)\theta$, где $\theta = \frac{2\pi}{N}$ и N — число тел качения, можно определить как

$$u_{rj} = \mathbf{S}_j \mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \cos \psi_j & \sin \psi_j \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Соответственно, со стороны каждого из роликов на внутреннее кольцо будут действовать радиальное усилие Q_i . Уравнение равновесия подшипника в таком случае можно записать в виде

$$\mathbf{F} + \sum_{j=1}^N Q_{ij} \mathbf{S}_j^T = \mathbf{o}. \quad (4)$$

Для j -го тела качения, зажатого между кольцами, как показано на рисунке 2, справедливо следующее геометрическое соотношение:

$$\frac{g}{2} + \delta_{ij} + \delta_{ej} + w_{ij} + w_{ej} - u_{rj} = 0, \quad (5)$$

где g — номинальный диаметральный зазор в подшипнике, δ_{ij} и δ_{ej} — контактные проникновения ролика в поверхность внутреннего и наружного колец, w_{ij} и w_{ej} — смещения поверхностей внутреннего и наружного колец в радиальном направлении. Считается, что в процессе нагружения подшипника ролики не меняют своего углового положения и двигаются строго по радиусу. Данное допущение приближенное, но с учетом присутствия в конструкции подшипника сепаратора вполне справедливое, и величина приносимой им ошибки несущественна.

Если ролик является цилиндрическим, то упругое взаимодействие можно принять Герцевским, а значит контактное усилие, действующее на ролик и поверхность дорожки качения, описывается следующим степенным законом [6]:

$$Q_a = C_a L \delta_a^n, \quad (6)$$

где индекс $a = \{e, i\}$ является признаком внешнего или внутреннего кольца. Наличие контакта с кольцом определяется условием $\delta_a > 0$, в противном случае $Q_a = 0$. Коэффициент контактной жесткости C_a зависит от свойств используемых материалов. Если ролики и кольца изготовлены из одного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ , то можно принять [7]

$$C_a = \frac{\pi E L}{(1 - \mu^2) (7.358 L)^n}, \quad (7)$$

где показатель степени для контакта по линии $n = \frac{10}{9}$. Отметим, что в рамках предложенного подхода возможна работа и с профилированными роликами, как посредством приближенной методики воспроизведения геометрии тела качения цилиндрическими слайсами [8], так и путем решения нелинейной задачи контакта [9].

Выражения (4) и (5) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений с $N + 2$ неизвестными: u_x, u_y, Q_{ij} . Для ее решения может быть использован итерационный метод Ньютона–Рафсона. Дополнительно на систему наложены N физических связей $Q_{ij} \geq 0$, влияние которых учтено с помощью логарифмических барьерных функций. Силы Q_{ej} в явном виде не входят в разрешаемую систему уравнений, т.к. определяются из условий равновесия j -го ролика:

$$Q_{ej} = Q_{ij} + F_c, \quad \text{где} \quad F_c = m\omega_c^2 R_p. \quad (8)$$

Здесь m — масса тела качения, а ω_c — скорость его вращения вокруг центра подшипника, совпадающая со скоростью вращения сепаратора и вычисляемая через угловые скорости колец [10].

2.2 Деформация кольца подшипника

Кольцо подшипника можно рассматривать как стержень начальной кривизны, находящийся под действием набора радиальных усилий. Приложенная система сил в общем случае не является самоуравновешенной и требует внешних закреплений кольца, достоверно определить которые затруднительно. Ниже предложено несколько приближенных подходов к учету податливости колец, которые позволяют обойти вопрос идентификации кинематических граничных условий.

Методика 1: деформация кольца от равномерно распределенных радиальных усилий равной величины

Рассмотрим кольцо прямоугольного поперечного сечения площадью A (ширина b , высота h), имеющего радиус средней линии R , под действием N равномерно распределенных по его длине сосредоточенных сил равной величины Q . Из курса деталей машин [11] известно, что для такой схемы нагружения в случае достаточно большого числа N влияние сжимающих (растягивающих) усилий на деформированное состояние кольца становится преобладающим и изгибными добавками можно пренебречь. Радиальное перемещение точки приложения усилия тогда можно записать как

$$w = \frac{QR}{EA\theta}. \quad (9)$$

С учетом этого факта можно предложить следующий вариант определения контактных усилий:

- 1) решить систему (5) с N неизвестными для заданного зазора/натяга и частоты вращения колец подшипника, принимая $\mathbf{F} = \mathbf{o}$;

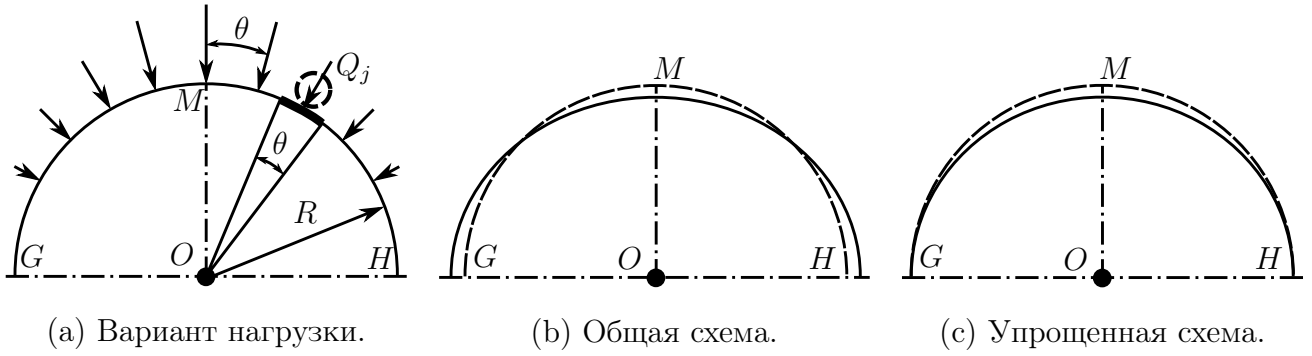


Рис. 3: Полукольцо подшипника под действием внешней нагрузки.

- 2) обновить заданный зазор с учетом полученных значений w_e и w_i (одинаковые для всех тел качения) следующим образом: $g_{\text{eff}} = g + 2w_e + 2w_i$;
- 3) с учетом $g = g_{\text{eff}}$ решить систему уравнений (4)–(5) для заданной радиальной нагрузки \mathbf{F} , принимая кольца абсолютно жесткими, т.е. $w_{ej} = w_{ij} = 0$.

Разумеется, предложенный подход не рассматривает дополнительные изгибные деформации кольца, и ниже будут предложены подходы, учитывающие этот фактор.

Методика 2: упрощенная посекторальная схема деформации при равномерном распределении радиальных сил неравной величины

В данном случае примем, что даже в случае неравных усилий Q_{aj} , как показано на рисунке 3а, для каждого конкретного j -го ролика в отдельности применимо (9) для определения радиального смещения кольца. Такое допущение рассматривает кольцо как набор сегментов конечной длины θR , каждый из которых находится под действием постоянной сжимающей нагрузки, уравнивающей внешнюю радиальную силу. Сделанное предположение заменяет общую схему деформации полукольца подшипника, показанную на рисунке 3б, таким упрощенным вариантом (см. рисунок 3с), в котором не учитывается “выпячивание” в узлах G и H . В отличие от методики 1, такой подход позволяет получить решение в одно действие, работая напрямую с системой (4)–(5). Ниже на численном примере мы оценим границы применимости такого подхода. Очевидно, что введенное упрощение, так же как и вышеописанная методика, фактически не учитывает деформации, связанные с изгибом кольца.

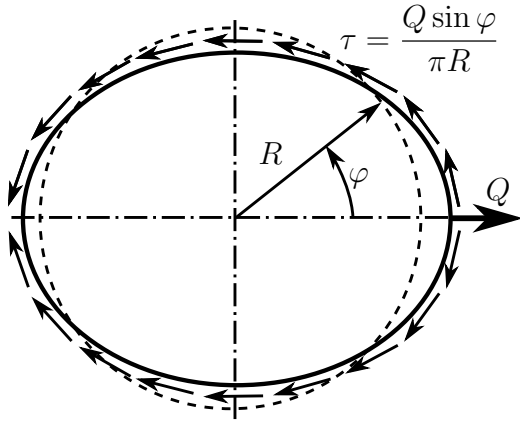


Рис. 4: Кольцо под действием радиальной силы и распределенных касательных усилий.

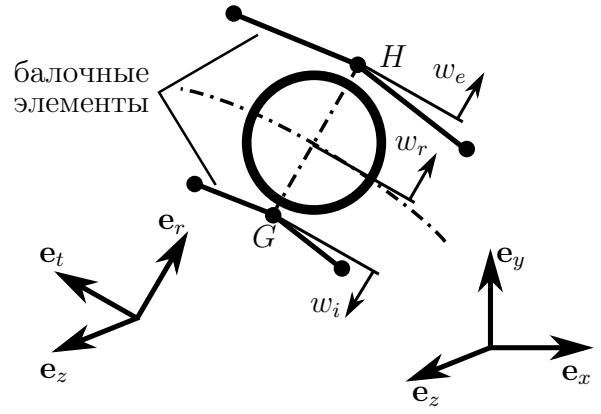


Рис. 5: Конечный элемент ролика и прилегающие балочные элементы, моделирующие кольца.

Методика 3: воспроизведение деформированного состояния кольца с помощью разложения в ряд Фурье при произвольном нагружении

Вообще, известное деформированное состояние кольца от действия точечной радиальной нагрузки Q_j можно представить в виде ряда Фурье как

$$w_j(\varphi) = Q_j \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(k\varphi), \quad (10)$$

где множители

$$D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi) d\varphi \quad \text{для } k = 0, \quad (11a)$$

$$D_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi \quad \text{для } k > 0 \quad (11b)$$

являются коэффициентами податливости. В силу малости перемещений центральной линии кольца его деформированное состояние от действия N радиальных усилий Q_j , каждое из которых приложено под углом ψ_j , можно представить в виде

$$w(\varphi) = \sum_{j=1}^N w_j(\varphi) = \sum_{j=1}^N Q_j \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos k(\psi_j - \varphi). \quad (12)$$

Для определения коэффициентов D_k воспользуемся аналитическим решением [12] для кольца, находящегося под действием сосредоточенной радиальной силы, приложенной в одной из его точек и уравновешенной касательными усилиями, распре-

коэффициент	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
значение	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{225}$

Таблица 1: Первые пять коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $\chi(\varphi)$.

ленными вдоль длины по синусоидальному закону как показано на рисунке 4:

$$w(\varphi) = \frac{PR^3}{4\pi EI} \chi(\varphi), \quad (13)$$

где

$$\chi(\varphi) = \left((\varphi - \pi) \sin \varphi + \left(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\pi^3}{3} \right) \cos \varphi + 2 \right). \quad (14)$$

Первые пять коэффициентов разложения Фурье для функции $\chi(\varphi)$ собраны в таблице 1, соответственно, $D_k = \frac{R^3}{4\pi EI} d_k$. Стоит обратить внимание, что решение (13) никак не учитывает условия закрепления кольца в опорном узле, которые в реальных задачах придают ему дополнительную жесткость, поэтому для получения более точных значений коэффициентов D_k можно воспользоваться 3D моделью опоры в случае ее наличия. Для этого трехмерная КЭ модель сборки кольца и вала (или кольца и корпуса) нагружается единичным радиальным усилием в одной из точек по аналогии со схемой, показанной на рисунке 4. Полученные радиальные перемещения используются для численного интегрирования выражений (11).

Предложенный подход имеет ряд недостатков:

- 1) возникающие в кольце деформации, связанные с эффектами растяжения/сжатия, никак не учтены;
- 2) несложно заметить, что в случае равных эквидистантно расставленных по окружности сил $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_N$ радиальное перемещение в точках их приложения $w(\psi_i) \equiv 0$.

Данные факторы оказываются существенными, когда тела качения вращаются и на них действуют силы инерции, либо подшипник работает в условиях натяга. Чтобы учесть их влияние, перед проведением расчетов с использованием разложения (12) мы определяем эффективный радиальный зазор g_{eff} в соответствии с методикой 1.

Методика 4: конечно-элементная модель в Dynamics R4 для общего случая нагружения кольца

Представленные выше методики представляют собой сильно упрощенные подходы. Нами также построена более сложная, но при этом достаточно легковесная КЭ модель, сборка которой легко поддается автоматизации, для решения той же задачи в системе Dynamics R4 (<http://alfatran.com/>). Кольца дискретизируются с помощью нелинейных балочных элементов [13]. Число элементов для разбиения каждого из колец в нашем случае принимается равным $3N$, но это может быть любое другое значение кратное N . Пусть внешняя радиальная сила направлена по оси x . Чтобы исключить движение системы как жесткого целого, на наружном кольце в каждом из узлов необходимо добавить жесткость K_{xx} , значения которой на несколько порядков меньше, чем жесткости балок. Вдоль элементов внутреннего кольца с координатами узлов $x > 0$ прикладывается распределенная нагрузка $q_x(\varphi) = q_0 b \cos \varphi$, такая, что

$$F_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q_0 b \cos \varphi d\varphi. \quad (15)$$

Задача решается в плоскости XY , для чего во всех узлах модели необходимо запретить степени свободы $u_z = \theta_x = \theta_y = 0$.

В местах расположения роликов размещается специально разработанный двухузловой элемент, моделирующий поведение тела качения, поджатого двумя поверхностями и представленный на рисунке 5. КЭ имеет 2 внешние (по 1-й в каждом узле — w_i и w_e) и 1 внутреннюю степень свободы w_r . Для каждого элемента объявлена локальная система координат r, t, z (см. рисунок 1) с соответствующими единичными ортами, которые определяют локальную матрицу поворота

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_x^T + \mathbf{e}_t \mathbf{e}_y^T + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T. \quad (16)$$

Перемещения колец вдоль оси r , показанные на рисунке 5, в локальной системе координат вычисляются с помощью скалярного произведения:

$$w_e = \mathbf{u}_G \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{и} \quad w_i = -\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{e}_r, \quad (17)$$

где \mathbf{u}_G и \mathbf{u}_H — вектора перемещений узлов G и H в глобальных координатах. Проникновения ролика в поверхности внутренней и наружной дорожек качения, соответственно, можно определить следующим образом:

$$\delta_i = -\frac{g}{4} - w_r - w_i \quad \text{и} \quad \delta_e = -\frac{g}{4} + w_r - w_e. \quad (18)$$

Неизвестное радиальное смещение тела качения w_r определяется при отыскании равновесия в соответствии с (8), для чего применяется метод Ньютона–Рафсона. При решении уравнения (8) потребуются локальные коэффициенты жесткости

$$K_a = nC_a L \delta^{n-1}. \quad (19)$$

Вектор узловых сил и соответствующая ему локальная матрица жесткости будут выглядеть как

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_e \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_s & -K_s \\ -K_s & K_s \end{bmatrix}, \quad (20)$$

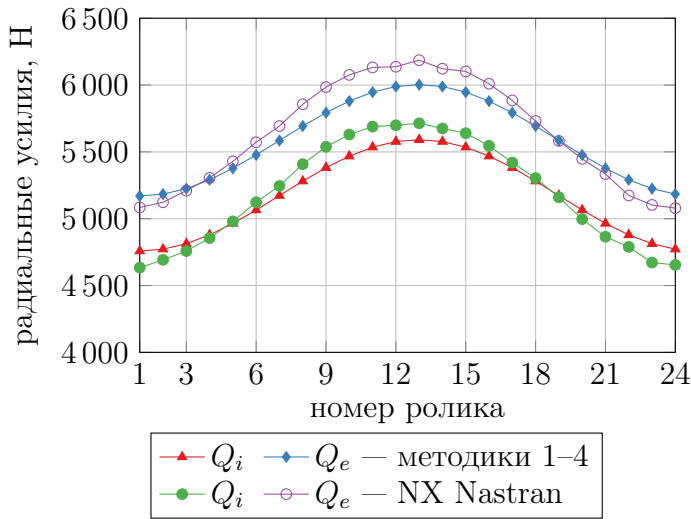
где коэффициент жесткости K_s вычисляется как суммарный для последовательного соединения двух жесткостей

$$K_s = \frac{K_e K_i}{K_e + K_i}. \quad (21)$$

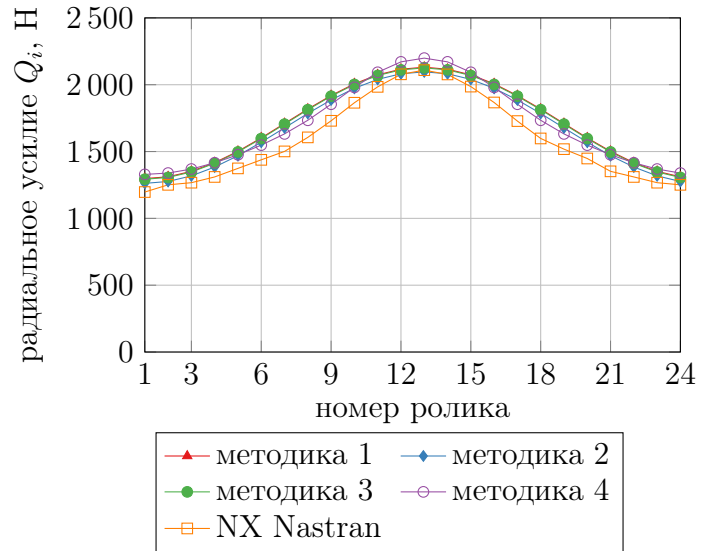
В глобальную систему координат компоненты (20) преобразуются стандартным для МКЭ образом с помощью матрицы поворота (16).

3 Численный пример

Рассмотрим радиальный роликовый подшипник качения с $R_p = 75$ мм, $R_b = 6,5$ мм, $L = 16$ мм, $N = 24$. Дополнительно укажем параметры $h_e = 15,5$ мм, $h_i = 14,5$ мм, $b = 30$ мм, необходимые для учета деформации колец. Радиальная нагрузка $F_x = 5000$ Н, внутреннее кольцо подшипника вращается со скоростью $\omega = 12000$ об/мин. Материал — сталь, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³. Жесткость связей, прикрепленных к узлам наружного кольца и моделирующих мягкое упругое основание для исключения движения как жесткого целого, составляет $K_{xx} = 3 \cdot 10^3$ Н/м.



(a) Жесткие кольца.



(b) Податливые кольца.

Рис. 6: Распределение радиальных усилий в подшипнике, работающем с натягом $g = -40$ мкм.

3.1 Случай натяга $g = -40$ мкм

Оценим для начала результаты в условиях натяга. Если совсем не учитывать деформацию колец, то получаемые значения контактных усилий оказываются завышенными в 2,5 раза, что показано на рисунке 6а. Т.к. внутри всех разработанных методик лежит идентичное контактное соотношение (6), то для случая жестких колец все они дают одинаковые результаты. Был также проведен расчет в комплексе NX Nastran¹, для чего использовалась трехмерная модель, представленная на рисунке 9. Приложенная нагрузка распределена по закону (15). Наружное кольцо закреплено с двух сторон к цилиндрам длиной по 235 мм, противоположные торцы каждого из которых жестко заделаны. За счет того, что для цилиндров задана заниженная величина модуля Юнга $E' = 0,01E$, их вкладом в жесткостные характеристики кольца можно пренебречь. Моделирование подшипника с жесткими кольцами существенно проще. Для этого необходимо закрепить внешнюю поверхность наружного кольца, а нагрузку приложить к центральному узлу внутреннего кольца, который связан с внутренней поверхностью последнего через абсолютно жесткие элементы. Заметим,

¹Модель подшипника с зазором (как с податливыми, так и с гибкими кольцами) в пакете NX Nastran в рамках данной работы не строилась в силу своей существенно большей сложности — обсуждение нюансов построения такой конечно-элементной модели само по себе может являться предметом отдельной статьи.

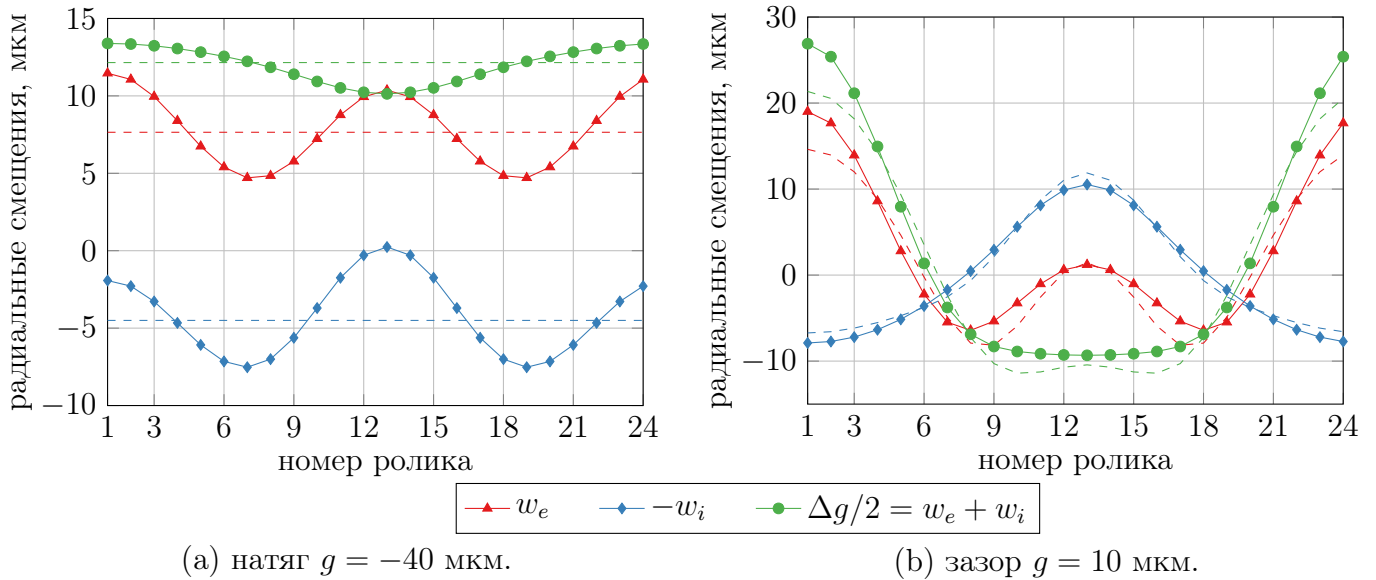


Рис. 7: Радиальные смещения колец и изменение радиального зазора в подшипнике (после пост-процессинга результатов, полученных по 4-й методике).

что модель в NX Nastran по своей природе принципиально отличается от приближений, предложенных в статье (подход 4 среди прочих наиболее близок к ней), поэтому стоит сравнивать полученные результаты осторожно. Расчет в стороннем МКЭ комплексе в данном случае был проведен не с целью получения референсных значений, а чтобы оценить качественные изменения в силовой картине подшипнике в случае податливых и жестких колец.

Согласно кривым с рисунка 6b все методики дают близкие друг к другу результаты, которые при этом согласуются с данными, полученными в пакете NX Nastran. Такая хорошая корреляция полученных значений свидетельствует о допустимости предположения, что для случая натяга эффекты изгиба не меняют существенно картину распределения радиальных усилий, однако, сами изгибные деформации в кольцах при этом возникают. Оценить их можно с помощью решения, полученного упрощенной КЭ моделью в Dynamics R4. На рисунке 7a показаны величины радиальных смещений колец, а также результирующее изменение радиального зазора при приложении внешней силы, пунктиром же показаны кривые для случая ее отсутствия. При построения графиков на рисунке 7 смещение подшипника как жесткого целого отфильтровывалось из перемещений u_z на этапе постпроцессинга. Хорошо видно, что при приложении внешней радиальной нагрузки в кольцах возникают изгибные де-

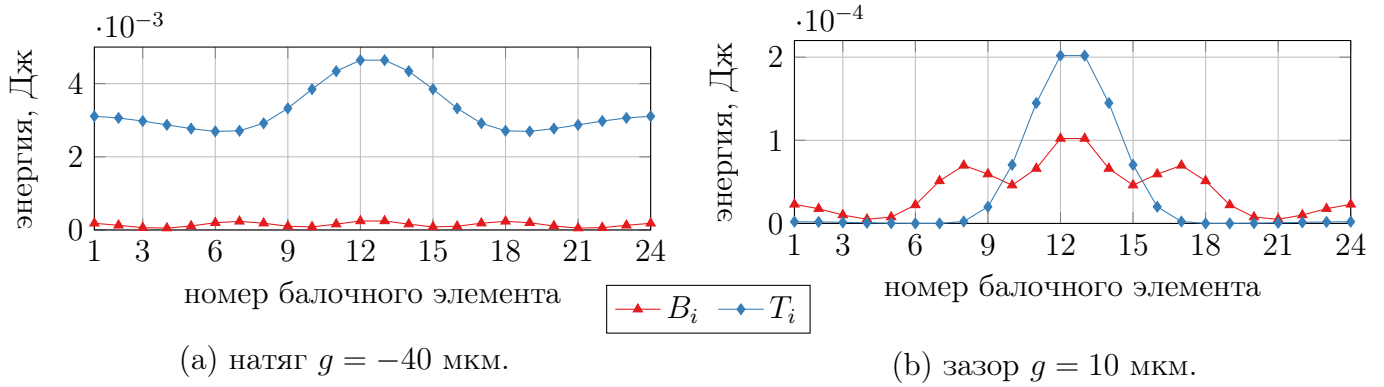


Рис. 8: Разложение энергии деформации внутреннего кольца на составляющие изгиба B_i и растяжения/сжатия T_i .

формации, но суммарное увеличение радиального зазора при этом хоть и перестает быть постоянным вдоль колец, но амплитудные значения этой неравномерности оказываются невелики. Иными словами, под действием внешней радиальной нагрузки кольца изгибаются, но изменение их формы происходит таким образом, что увеличение радиального зазора для каждого из роликов остается практически постоянным. Как следствие, изгибные деформации в данном случае слабо влияют на перераспределение внутренних усилий, действующих на тела качения. Разумеется, при росте внешней нагрузки F_r данное допущение будет все более грубым.

Также нелинейный балочный элемент из комплекса Dynamics R4 позволяет определить свою энергию деформации и разложить ее на отдельные составляющие, связанные с растяжением/сжатием, изгибом и кручением. Рисунок 8а показывает первые два компонента энергии (кручение в данной задаче, очевидно, отсутствует) для внутреннего кольца. Хорошо видно, что в случае натяга энергия растяжения/сжатия стержня будет существенно превосходить энергию деформации, связанную с изгибом.

Обращает на себя внимание практически полное совпадение кривых, полученных с помощью методик 1 и 3. В разделе 2.2 отмечалось, что разложение (12) дает нулевые перемещения в точках приложения радиальных сил в случае, когда эти силы равны. Однако оказывается (и наше прочие численные эксперименты это подтвердили), что и для ситуации когда все Q_j хоть и не равны между собой, но при этом меняются достаточно плавно по длине кольца, формула (12) также дает близ-

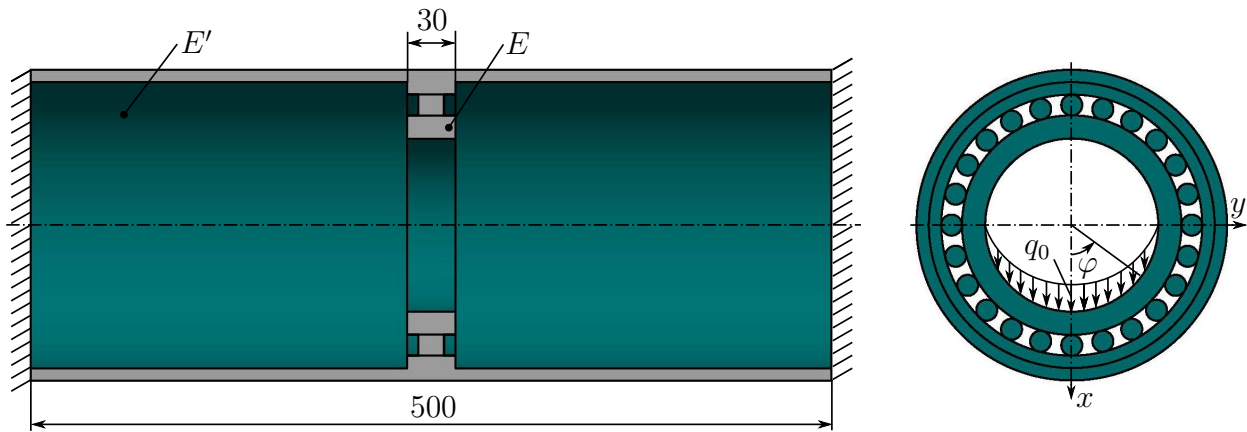
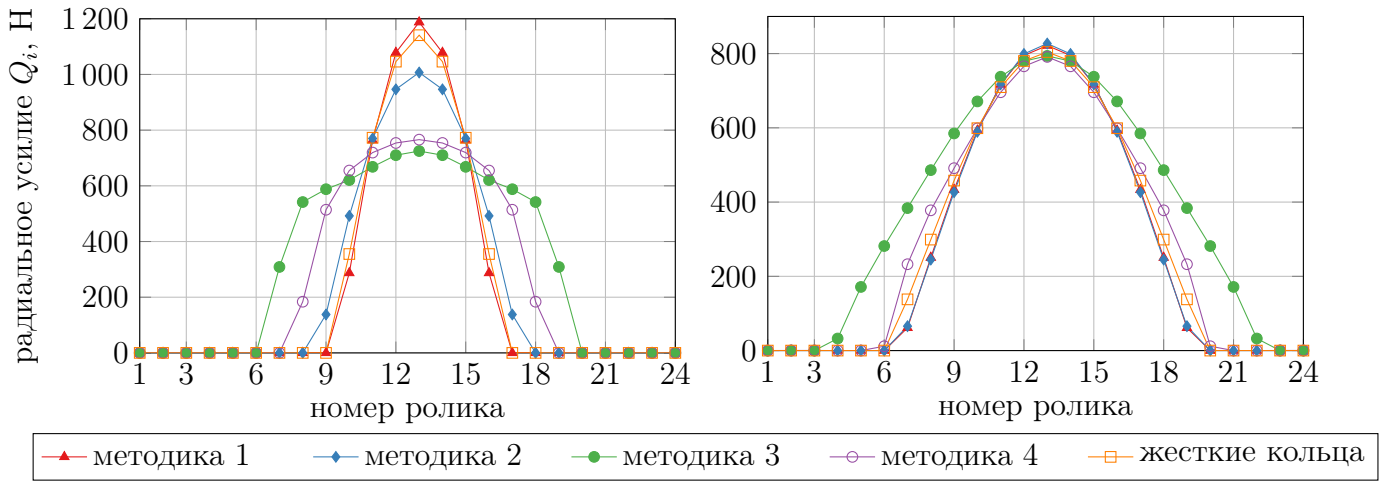


Рис. 9: Модель подшипника с податливыми кольцами в комплексе NX Nastran.

кие к нулю значения. Так, норма вектора радиальных перемещений для внутреннего кольца, определенных по формуле (12) в местах расстановки тел качения равна $\|w(\varphi_i)\| = 0,0074106$ мкм ($i = 1 \dots N$), в то время как изменение радиуса кольца в результате натяга в подшипнике и действия сил инерции на ролики составляет 4,1 мкм. Становится понятно, что результат расчета по методике 3 практически полностью совпал с результатом методики 1 лишь по той причине, что последняя является предварительным шагом при работе с первой. Если бы мы не определяли эффективный диаметральный зазор g_{eff} , то подход, основанный на разложении изгибных деформаций в ряд Фурье давал бы такие же радиальные усилия, как и решение для абсолютно жестких колец.

3.2 Случай зазора $g = 10$ мкм

Результаты расчета того же самого подшипника в условиях работы с зазором представлены на рисунке 10а. Так, кривая, полученная с помощью подхода 1, практически полностью повторяет график для случая абсолютно жестких колец, что было вполне ожидаемо. Более того, максимальное значение радиального усилия даже возросло, что связано с фактическим увеличением эффективного зазора за счет действия центробежных сил на тела качения. Методика 2 в данных условиях оказывается более пригодной, т.к. способна качественно показать факт снижения радиальных усилий вследствие податливости колец. Достаточно хорошо между собой коррели-



(a) Зазор $g = 10$ мкм.

(b) Натяг $g = -1,5$ мкм.

Рис. 10: Распределение радиальных усилий Q_i для случаев зазора и малого натяга в подшипнике. руют кривые, полученные с применением подходов 3 и 4: максимальные значения радиальных сил близки, хотя сами профили распределения усилий несколько различны, особенно на границе зоны контакта. Тем не менее, расхождение в радиальных силах для роликов, отстоящих от точки приложения внешней силы, является не критичным, т.к. для последующей оценки долговечности подшипника наибольший вклад в определение эквивалентной нагрузки вносят именно наиболее нагруженные тела качения.

На первый взгляд, в условиях зазора в подшипнике методика 2 проигрывает подходу 3, но при этом не стоит забывать, что аналитические коэффициенты податливости D_k вычисляются для колец и участков корпуса и вала достаточно малой длины и никак не учитывают особенности конструкции опорного узла. В реальности же опора оказывается жестче, и, как отмечалось ранее, чтобы учесть этот факт необходимо определять коэффициенты D_k с помощью МКЭ анализа 3D модели опорного узла. В этом смысле, если рассматривать результаты расчета с абсолютно жесткими кольцами как оценку величины радиальных сил сверху, то за оценку снизу можно принимать значения контактных усилий, полученных по методике 3. Результаты, полученные с помощью методики 2, для случая зазора будут лежать между ними, поэтому, принимая во внимание ее высокую производительность, она может быть эффективно использована в первоначальных проектировочных расчетах, причем как для анализа подшипника в отдельности, так и в составе роторной системы в целом.

Для подшипника, работающего в условиях зазора, изгибные деформации колец в большей степени по сравнению с предыдущим случаем влияют на распределение внутренних усилий. Так, схемы деформации внешнего и внутреннего колец уже качественно не повторяют друг друга, как в случае натяга, а принципиальным образом различаются, см. рисунок 7b (пунктиром показаны аналогичные кривые, полученные с помощью 3-й методики). Согласно рисунку 8b в отдельных участках колец энергия, обусловленная изгибными деформациями, будет превышать энергию растяжения/сжатия. Снижение максимальной нагрузки, действующей на тело качения, в данной схеме нагружения происходит, главным образом, за счет того, что кольца овализируются таким образом, что в контакте оказывается большее число роликов. Становится также понятно, почему для натяга этот фактор не является определяющим: синхронный изгиб колец не приводит к изменению числа тел в контакте.

3.3 Случай натяга $g = -1,5$ мкм без вращения

Интересно оценить работоспособность алгоритмов в условии когда изначально подшипник находится в натяге, но в результате приложенной внешней радиальной нагрузки в нем появляется зазор и можно наблюдать выход некоторых тел качения из контакта. Расчет проводим для $\omega = 0$, чтобы исключить вклад в раскрытие зазора сил инерции. Согласно кривым с рисунка 10b все предложенные подходы дают очень близкие результаты по максимальному радиальному усилию, хотя число тел качения в зоне контакта различается. Более того, распределение усилий без учета деформации колец практически не отличается от остальных вариантов решения задачи: в данном подшипнике при работе с околонулевым зазором или натягом влияние деформации колец на величины внутренних контактных усилий минимально.

4 Выводы

В статье была рассмотрена модель радиального подшипника качения с учетом деформации колец, для учета которой было проработано несколько решений. Каждая из предложенных методик имеет свои преимущества и недостатки, и при выборе

конкретной из них стоит отталкиваться от условий работы подшипника на заданном режиме (зазор или натяг, какова скорость вращения) и целей, преследуемых расчетчиком. Так, если подшипника работает как двухузловой конечный элемент в составе многокомпонентной роторной системы и требуется анализ ее сложного переходного процесса, то наиболее подходящим благодаря своей превосходной производительности окажется подход посекторальной деформации, особенно в случае натяга, однако в случае наличия зазора он может иметь достаточно высокую погрешность. Если проводится квазистатический расчет подшипника в отдельности (скажем, в рамках оценки долговечности), то в случае наличия натяга стоит отдать предпочтение методике 1, оценивающей расширение колец от действия идентичных равномерно распределенных радиальных усилий, а при зазоре — подходу 3, который, наоборот, ориентирован на воспроизведение изгибных деформаций. Эта же методика будет крайне эффективна в случае, когда есть возможность численно определить коэффициенты податливости с помощью КЭ модели опорного узла. Нелинейная балочная модель (подход 4) со специальными элементами, воспроизводящими поведение тел качения, обладает высокой степенью универсальности и может быть использована в любом из описанных сценариев, но при этом имеет сравнительно более низкую производительность.

Список литературы

1. *Jones A. B., Harris T. A.* Analysis of a Rolling-Element Idler Gear Bearing Having a Deformable Outer-Race Structure // *Journal of Basic Engineering*. — 1963. — Июнь. — Т. 85, № 2. — С. 273—278.
2. *Filetti E. G., Rumbarger J. H.* A General Method for Predicting the Influence of Structural Support Upon Rolling Element Bearing Performance // *Journal of Lubrication Technology*. — 1970. — Янв. — Т. 92, № 1. — С. 121—127.
3. *Cavallaro G., Nelias D., Bon F.* Analysis of High-Speed Intershaft Cylindrical Roller Bearing with Flexible Rings // *Tribology Transactions*. — 2005. — Т. 48, № 2. — С. 154—164.

4. *Leblanc A., Nelias D., Defaye C.* Nonlinear dynamic analysis of cylindrical roller bearing with flexible rings // *Journal of Sound and Vibration*. — 2009. — Т. 325, № 1/2. — С. 145–160.
5. *Балякин В. Б., Жильников Е. П., Самсонов В. Н.* Теория и проектирование опор роторов авиационных ГТД. — Самара: Издательство Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика С.П. Королёва, 2007.
6. *Palmgren A.* Ball and roller bearing engineering. — 1959.
7. *Andréason S.* Load distribution in a taper roller bearing arrangement considering misalignment // *Tribology*. — 1973. — Т. 6, № 3. — С. 84–92.
8. *de Mul J. M., Vree J. M., Maas D. A.* Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction—Part II: Application to Roller Bearings and Experimental Verification // *Journal of Tribology*. — 1989. — Т. 111, № 1. — С. 149–154.
9. *Ahmadi N., Keer L., Mura T.* Non-Hertzian contact stress analysis for an elastic half space—normal and sliding contact // *International Journal of Solids and Structures*. — 1983. — Т. 19, № 4. — С. 357–373.
10. *Леонтьев М. К., Снеткова Е. И., Дегтярев С. А.* Динамика неуравновешенного ротора на роликовом подшипнике // *Вестник Московского авиационного института*. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 95–105.
11. *Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б.* Расчет на прочность деталей машин: справочное пособие для конструкторов. — Машиностроение, 1993.
12. *Liu J. Y., Chiu Y. P.* Analysis of a Thin Elastic Ring Under Arbitrary Loading // *Journal of Engineering for Industry*. — 1974. — Авг. — Т. 96, № 3. — С. 870–876.
13. *Попов В. В., Сорокин Ф. Д., Иванников В. В.* Разработка конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // *Труды МАИ*. — 2017. — № 92.