# КОЛЕБАНИЯ УЗЛОВ И ДЕТАЛЕЙ

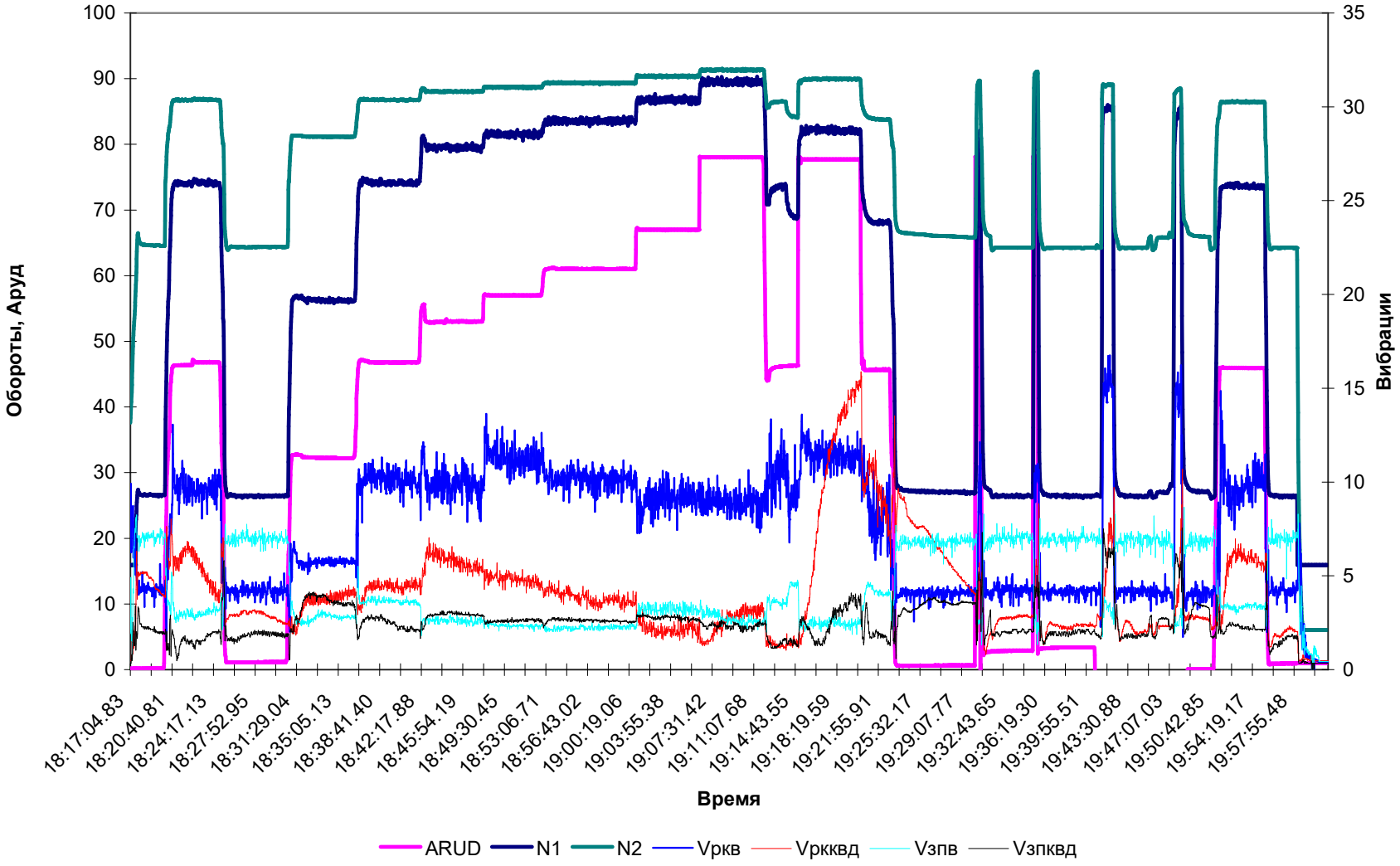
## Лекция 2

- **Гармонический анализ**
- **Примеры**
- **Основные этапы в изучении свойств колебательных систем**

# Гармонический анализ

# Измерение вибраций

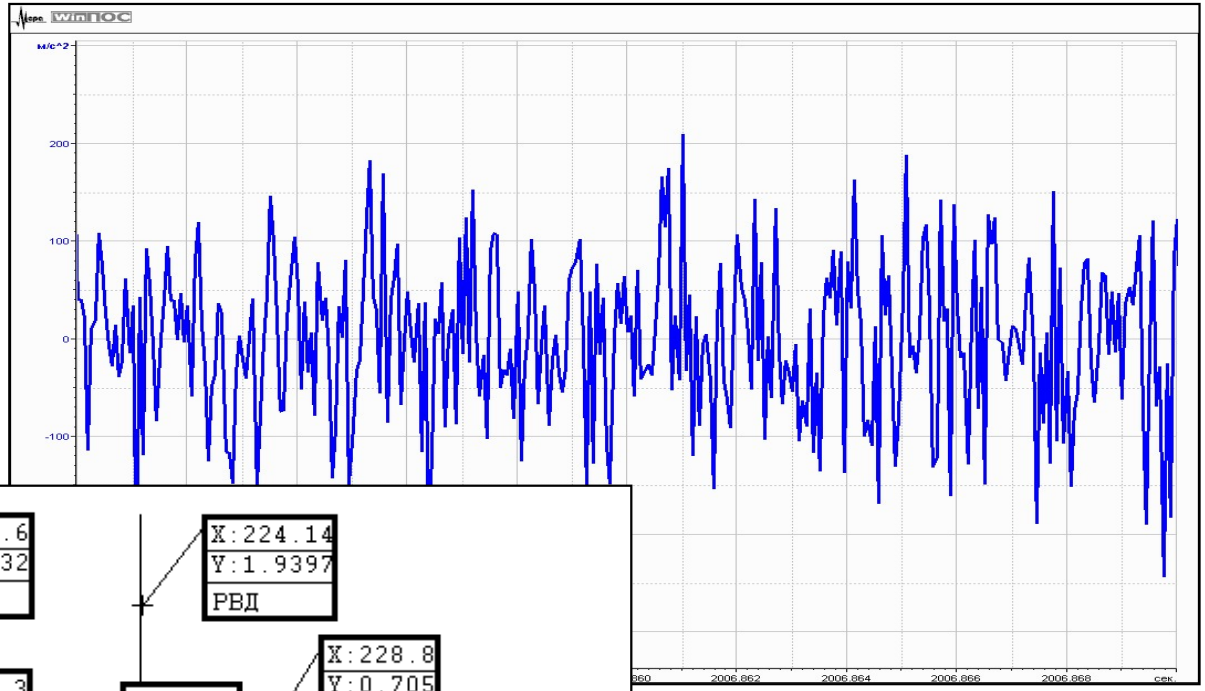
В двигателе одновременно существуют десятки источников вибрации со своей частотой, амплитудой и фазой. Все они складываются друг с другом, образуя суммарный сигнал вибраций, который и измеряется вибрационным датчиком. Как правило, суммарный сигнал, является периодическим

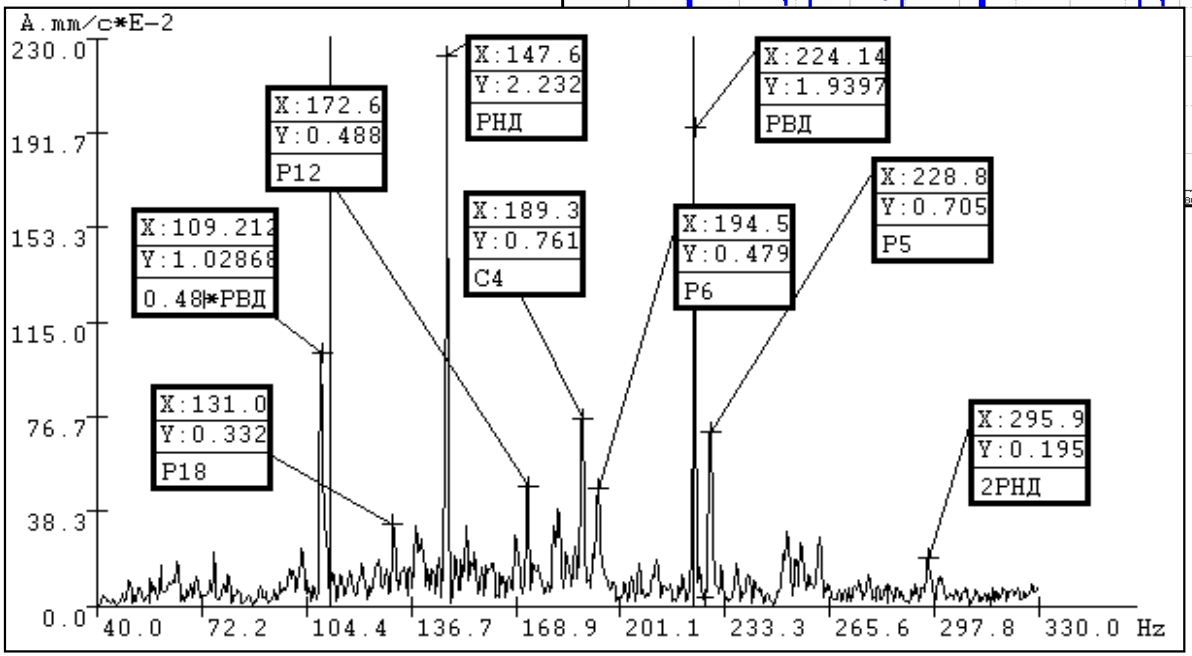


# Преобразование Фурье

Сложный периодический сигнал можно изучать как во временной области, так и в частотной. Перевод сигнала из временной области в частотную проводится с помощью преобразования Фурье и, в частности, с помощью алгоритмов БПВ (быстрого преобразования Фурье). В итоге, в частотной области мы получаем составляющие суммарного периодического сигнала

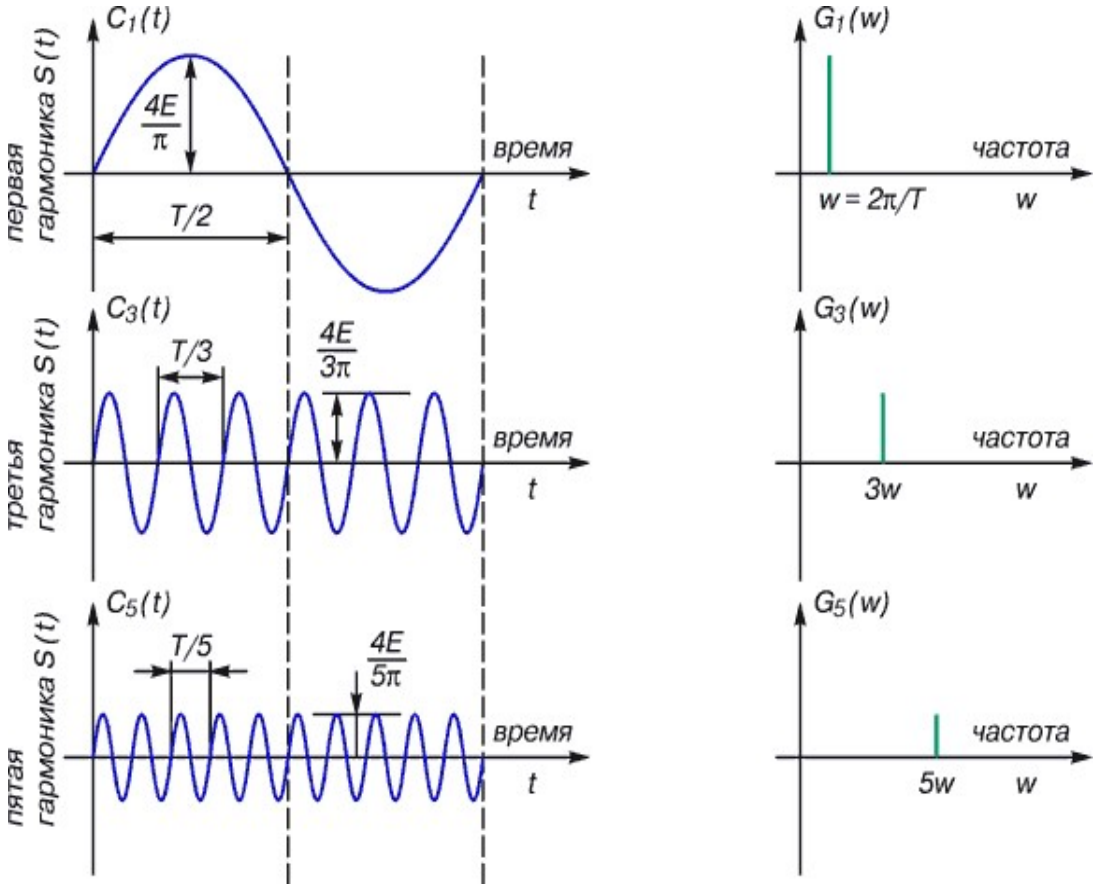
Временная область

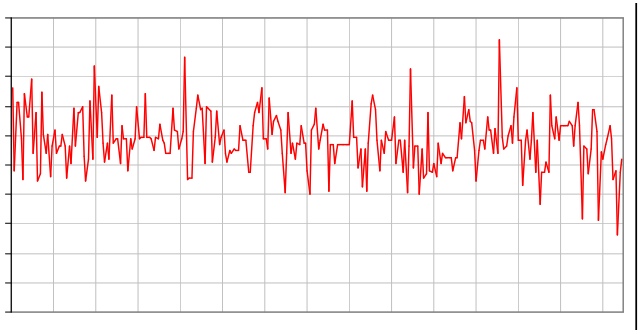


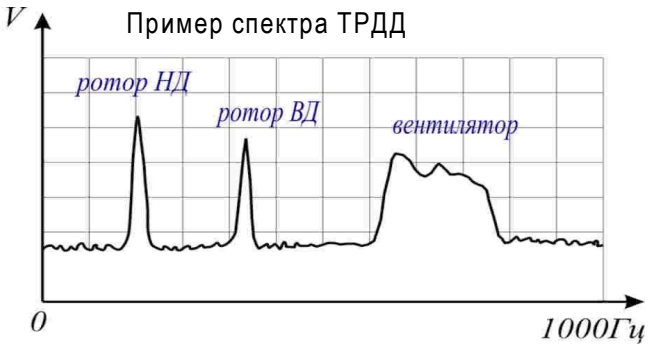

Частотная область

# Преобразование ФУРЬЕ



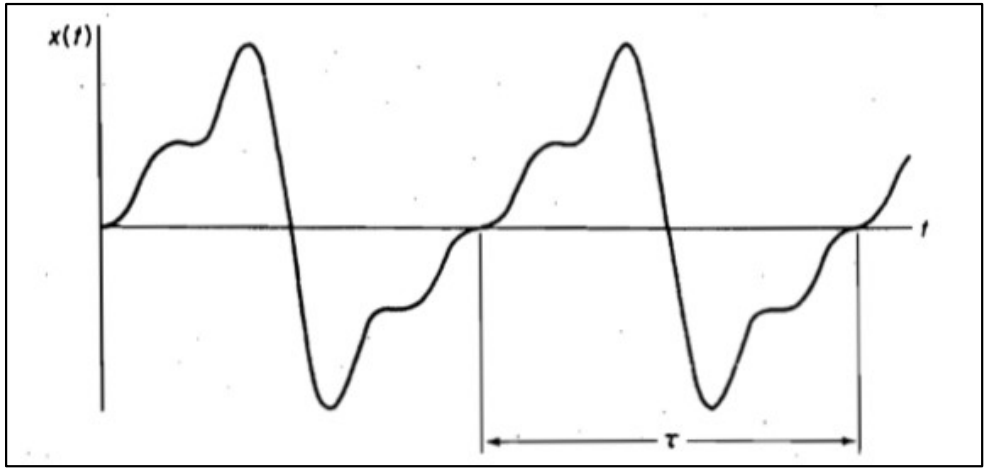



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$$



# Гармонический анализ

В двигателе одновременно существуют десятки источников вибрации со своей частотой, амплитудой и фазой. Все они складываются друг с другом, образуя суммарный сигнал вибраций, который и измеряется вибрационным датчиком. Как правило, суммарный сигнал, является периодическим




Любое периодическое движение может быть представлено рядом, состоящим из синусов и косинусов, связанных между собой (французский математик J.Фурье (1768-1830))

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \cdots + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \cdots$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\omega_n = n\omega_1$$

$\omega_1 = 2\pi/\tau$ - фундаментальная частота

# Гармонический анализ

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \cdots + b_1 \sin\omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \cdots$$

Чтобы определить коэффициенты $a_n$ и $b_n$, умножим обе части уравнения на $\cos \omega_n t$ и $\sin \omega_n t$ и далее проинтегрируем каждый член через период $\tau$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega_n t \cos \omega_m t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \tau/2 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \omega_n t \sin \omega_m t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \tau/2 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega_n t \sin \omega_m t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 0 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) \cos \omega_n t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) \sin \omega_n t \, dt$$

Гармонические функции (члены ряда Фурье)

$$a_n \cos n\omega_1 t \qquad b_n \sin n\omega_1 t$$

называются гармониками порядка ***n*** с периодом ***τ/n*** периодической функции ***x(t)***

# Гармонический анализ

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \cdots + b_1 \sin\omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \cdots$$

Если коэффициенты ряда Фурье представить на диаграмме вертикальными линиями (максимальные амплитуды) в зависимости от частоты $\omega_n$ , то получим спектр частот (гармоник , описывающих периодическое движение).

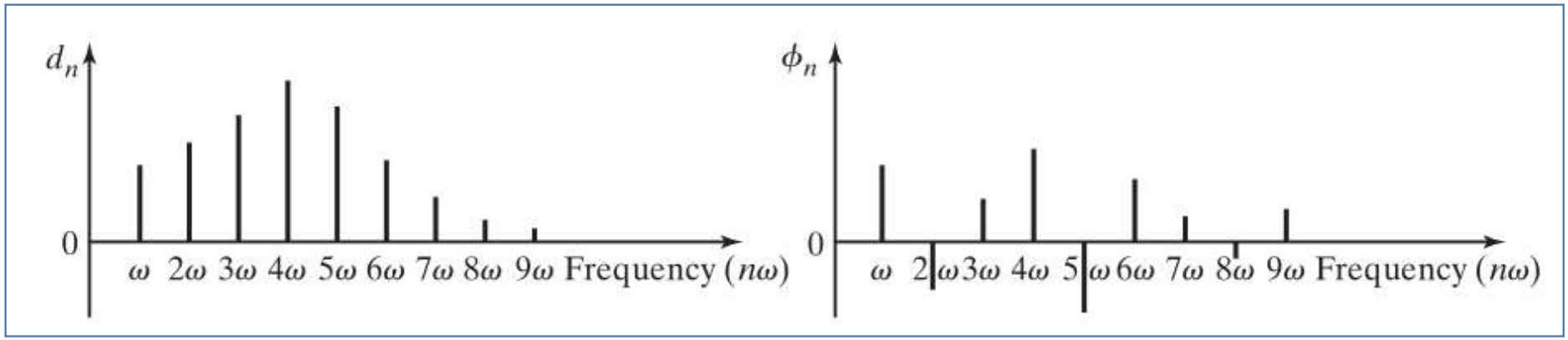
Обычно рассматриваются абсолютные величины гармоник

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

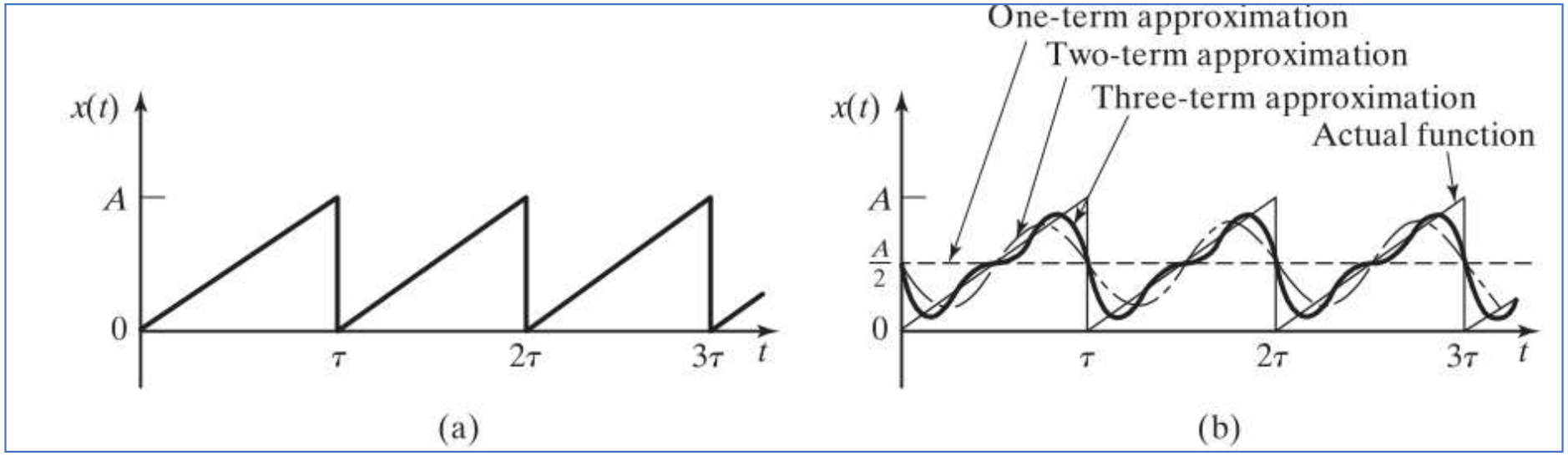
$$d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Пример спектра Фурье (частотный спектр, спектральная диаграмма)




Существуют быстрые алгоритмы получения спектральных характеристик вибрационного сигнала - БПФ

# Точность аппроксимации

**Точность аппроксимации зависит от количества членов, учитываемых в ряде Фурье**