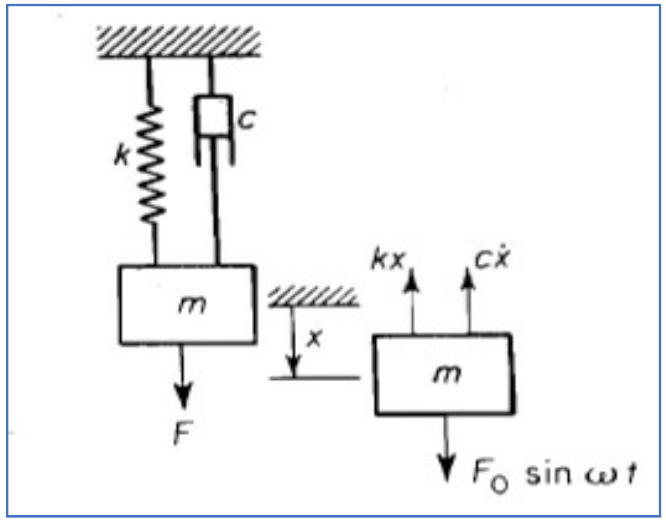
КОЛЕБАНИЯ УЗЛОВ И ДЕТАЛЕЙ

Лекция 6

- **Вынужденные колебания**

Гармонический осциллятор



Для линейных систем действителен принцип суперпозиции – сложения колебаний

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \qquad F_d = c\dot{x}$$

Решение линейного уравнения состоит из двух частей – решения однородного уравнения (рассмотрено ранее) и частного решения от действия возбуждающей гармонической силы

Частное решение ищем в виде

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

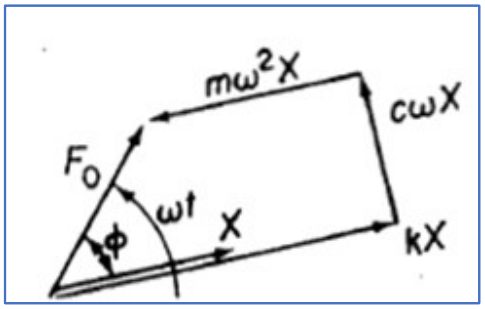
Здесь ω - частота возбуждающей силы F и ϕ - ее фаза по отношению к перемещению X

Кинематические соотношения гармонических колебаний

$$x = A \sin \omega t$$

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$



$$(-m\omega^2 X + kX)^2 + (c\omega X)^2 = F_0^2$$

Фазы гармонического движения по скорости и ускорению по отношению к перемещению составляют 90 и 180 градусов соответственно

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

Уравнение вынужденных колебаний в безразмерной форме

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

Переход к безразмерной форме решения – разделим числитель и знаменатель на ***k***.

С учетом $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad c_c = 2m\omega_n \quad \zeta = \frac{c}{c_c}$

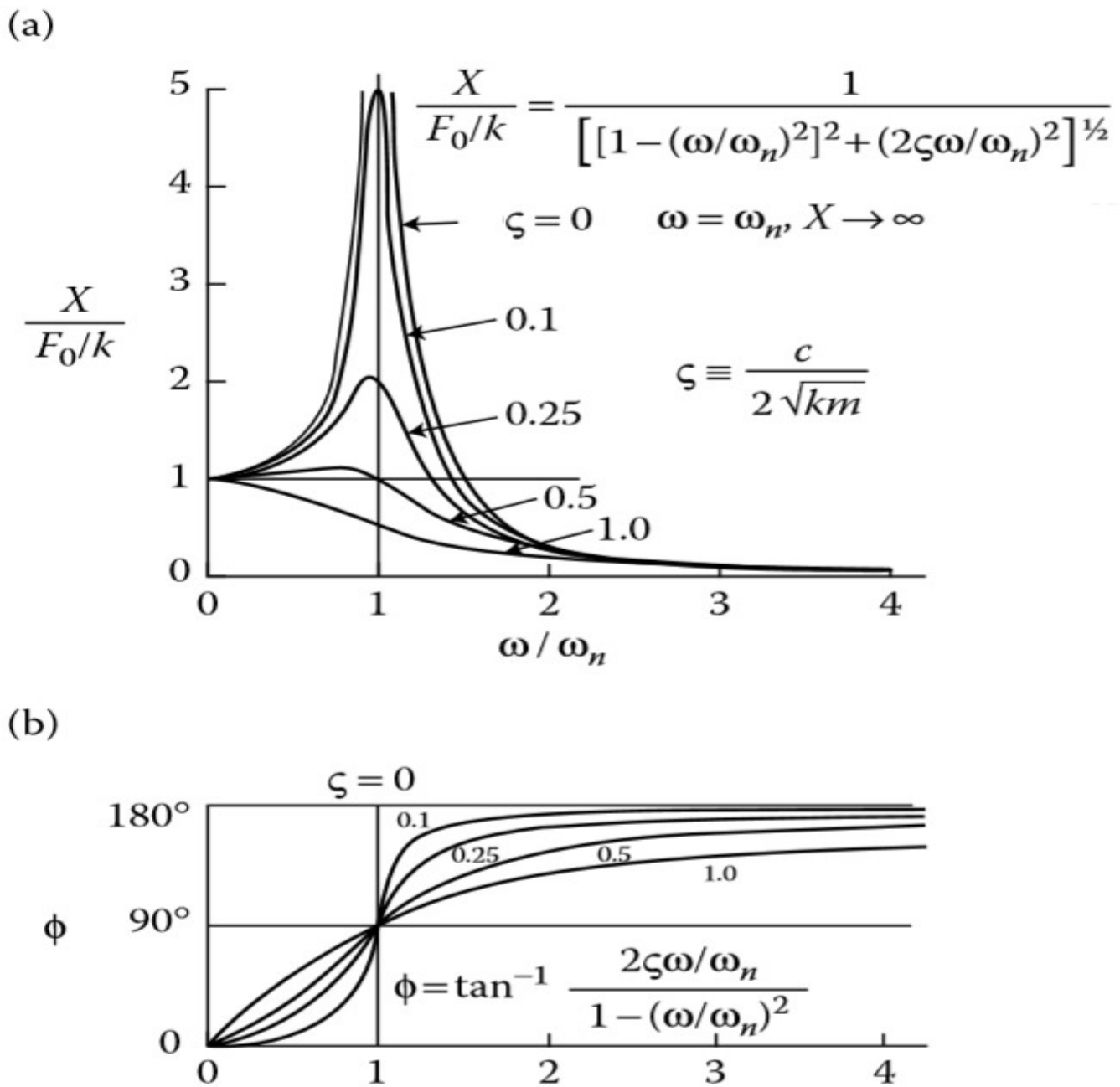
$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \qquad \frac{c\omega}{k} = \frac{c}{c_c}\frac{c_c\omega}{k} = 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$$

Частное решение можем записать

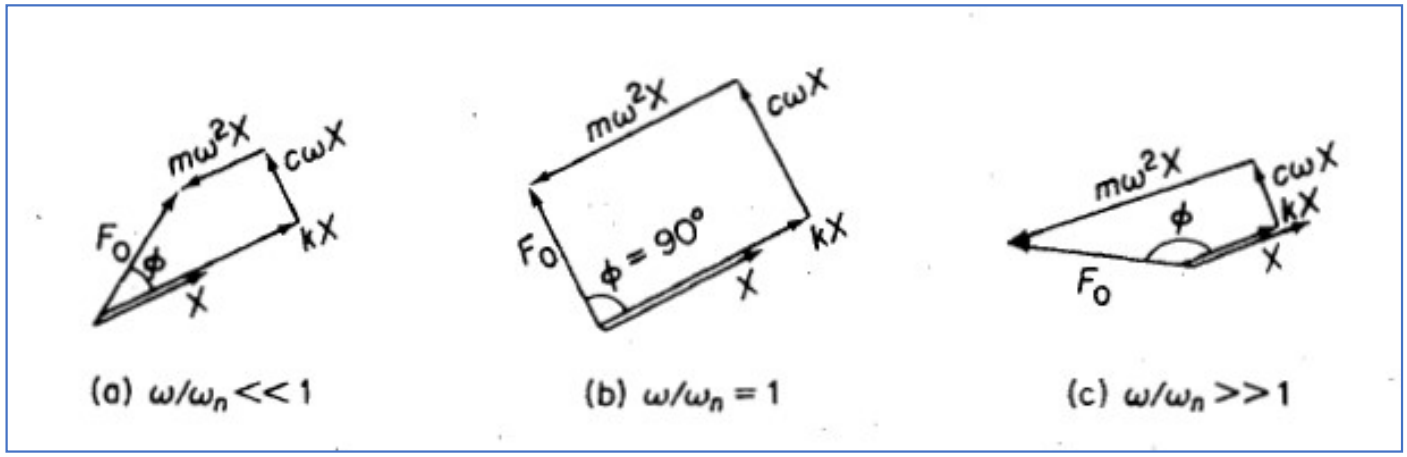
$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \qquad \tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Безразмерная величина Xk/F_0 и фаза ϕ зависят только от отношения частот и относительного демпфирования

Уравнение вынужденных колебаний в безразмерной форме



Уравнение вынужденных колебаний в безразмерной форме



Для малых значений ω/ω_n <<1 инерционные и упругие силы незначительные, фазовый угол мал. Амплитуда силы F0 близка к значению упругой силы *KX*

Для ω/ω_n =1 фазовый угол равен 90 град. Амплитуда силы F0 близка к значению упругой силы KX. Большая инерционная сила уравновешена упругой силой. Амплитуда на резонансе может быть определена как абсолютное значение демпфирующей силы $c\omega X$

$$X = \frac{F_0}{c\omega_n} = \frac{F_0}{2\zeta k}$$

Для ω/ω_n >>1 фазовый угол приближается к 180 град. Компенсирующая сила приближается к инерционной, демпфирующая к 0.

Уравнение вынужденных колебаний в безразмерной форме

Окончательно дифференциальное уравнение и его полное решение можно записать в следующей форме

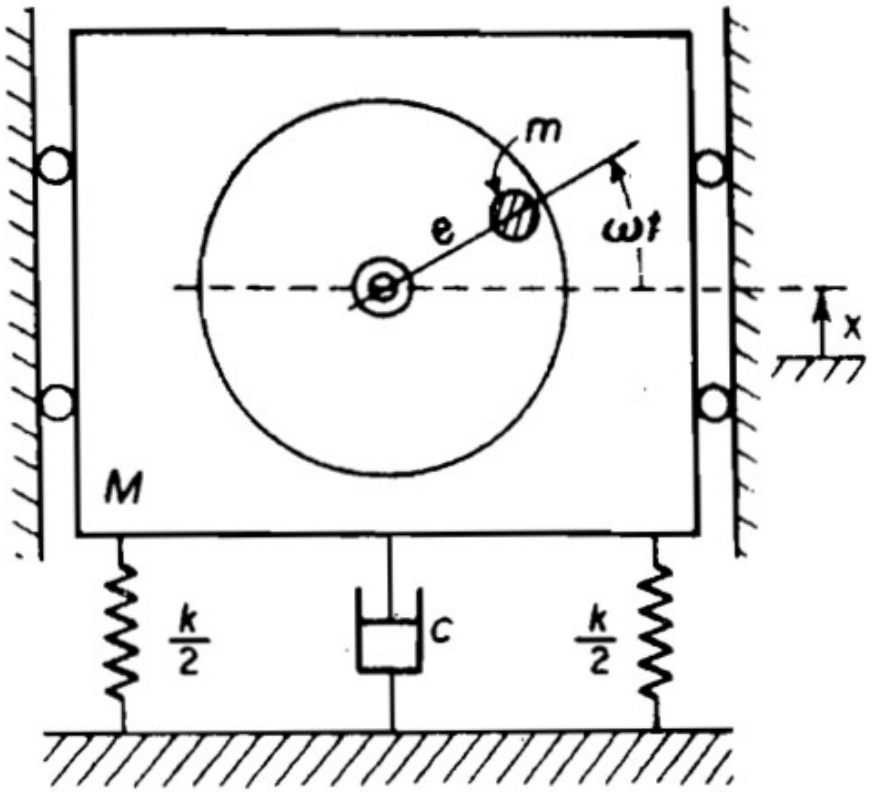
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} + X_1 e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n t + \phi_1\right)$$

Вращающийся дисбаланс

Система с одной степенью свободы



Система ограничена для движения в горизонтальном направлении .
Может двигаться только в вертикальном направлении

Внутри массы **M** находится вращающаяся с угловой скоростью ω от внешнего привода масса **m** с эксцентриситетом **e**

Две массы – два движения. Не вращающаяся масса (M-m) совершает движение x
Вращающаяся масса совершает движение $x + e \sin \omega t$

Уравнение движения

$$(M - m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + e\sin\omega t) = -kx - c\dot{x}$$

$$\boxed{M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = (me\omega^2)\sin\omega t}$$

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \tan\phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2}$$

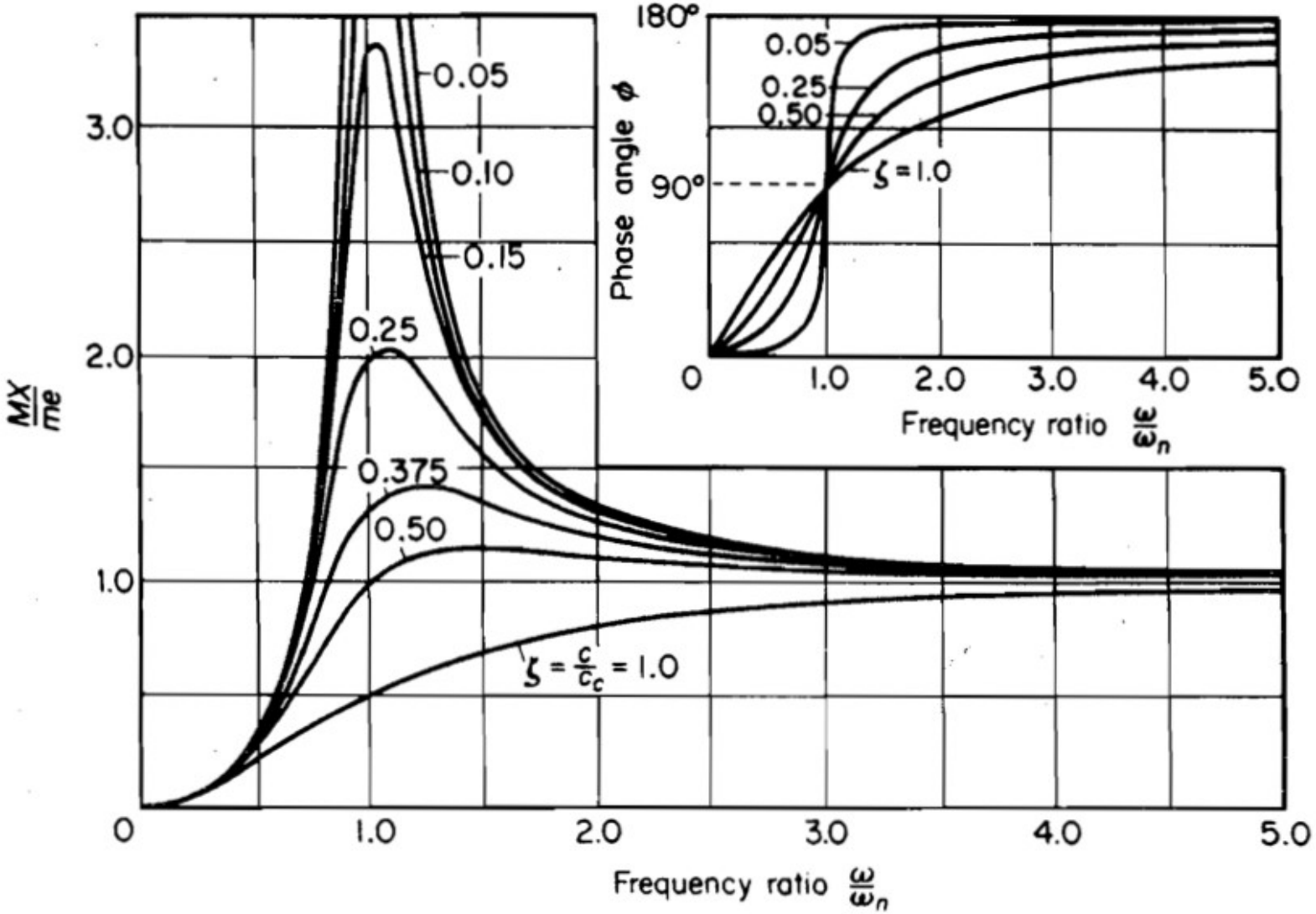
В безразмерной форме

$$\frac{M}{m}\frac{X}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad \tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Окончательно дифференциальное уравнение и его полное решение можно записать в следующей форме

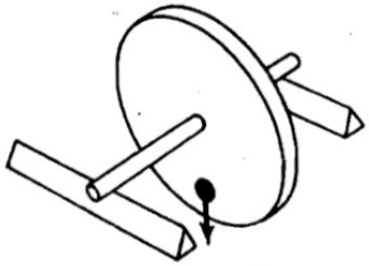
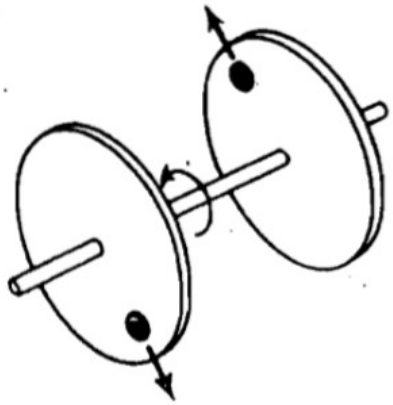
$$x(t) = X_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n t + \phi_1\right) + \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}\sin(\omega t - \phi)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики



Дисбалансы роторов

Статический дисбаланс – ротор имеет одну несбалансированную массу.
Дисбаланс может быть определен без вращения ротора.



Динамический дисбаланс – ротор имеет две несбалансированные массы.
Возникают результирующая сила и момент.
Момент не может быть определен без вращения ротора.